9.2 Η εύρεση της διαφορικής εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή

Η εύρεση της διαφορικής εξίσωσης **είναι** το βασικό πρόβλημα στην απλή αρμονική ταλάντωση. Κατ' αρχήν όταν φτάσουμε στη διαφ. εξίσωση $\ddot{x}+\omega^2x=0$ έχουμε αποδείξει συγχρόνως ότι το σύστημα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Συγχρόνως, από το συντελεστή ω^2 του x στη διαφ. εξίσωση προσδιορίζουμε αμέσως την κυκλική συχνότητα $\omega=\sqrt{\omega^2}$ της ταλάντωσης. Στη συνέχεια προκύπτει απλά η περίοδος $T=2\pi/\omega$ και η συχνότητα $f=\omega/2\pi$.

Για την εύρεση της διαφορικής εξίσωσης εργαζόμαστε με τον ακόλουθο τρόπο:

(I) Θεωρούμε τη θέση ισορροπίας του συστήματος και με αρχή αυτή ορίζουμε μία μεταβλητή θέσης η οποία καθορίζει την τυχαία θέση του συστήματος. Ορίζουμε ακόμη μία θετική φορά για τη μεταβλητή θέσης, η οποία είναι και η θετική φορά στο πρόβλημα.

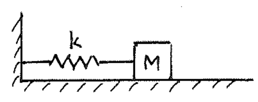
(II) Σχεδιάζουμε το σύστημα σε μία τυχαία θέση όπου όμως η μεταβλητή θέσης είναι θετική και σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος (Δ.Ε.Σ.) για την κινούμενη μάζα.

(III) Γράφουμε τις εξισώσεις της Δυναμικής ανάλογα με την μορφή του προβλήματος.

(IV) Συνδυάζουμε τις εξισώσεις αυτές και καταλήγουμε στη ζητούμενη διαφ. εξίσωση. Αν σ' αυτή εμφανίζονται σταθερές αυτές απαλείφονται αν θεωρήσουμε τη συνθήκη ισορροπίας για την κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.

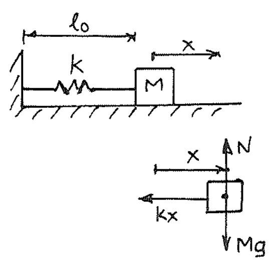
Σημείωση: Ένα σύστημα που κάνει αρμονική ταλάντωση περιγράφεται με τον όρο "**αρμονικός ταλαντωτής**"

Άσκηση 1



Στο διπλανό σχήμα το ελατήριο είναι αβαρές και έχει σταθερή k. Η μάζα M μπορεί να κινείται κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου χωρίς τριβή.
Αν μετατοπίσουμε τη μάζα προς τ' αριστερά κατά a από τη θέ-
ση ισορροπίας και την αφήσουμε ελεύθερη, να δειχθεί ότι αυτή θα κάνει αρμονική ταλάντωση, να βρεθεί η περίοδο-
της ταλάντωσης, η εξίσωση της κίνησης, η ταχύτητα και η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t.

Λύση



Είναι προφανές ότι η μάζα M ισορροπεί όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Με αρχή τη θέση ισορροπίας της μάζας M, ορίζουμε τη μεταβλητή x η οποία καθορίζει την τυχαία θέση της μάζας. (θετική φορά της x είναι αυτή του βέλους της, δηλαδή προς τα δεξιά).

Το Δ.Ε.Σ. της μάζας M, όταν αυτή βρίσκεται στη θέση x, φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη kx του ελατηρίου έχει φορ-
προς τ' αριστερά, αφού στη θέση αυτή το ελατήριο είναι τεντωμένο. Κατά τη διεύθυνση της κίνησης έχουμε:

$$\Sigma F = M\ddot{x} \implies -kx = M\ddot{x} \implies \ddot{x}+\frac{k}{M}x=0 \qquad (1)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση έχει τη μορφή $\ddot{x}+\omega^2x=0$, με

$$\omega^2=\frac{k}{M} \implies \omega=\sqrt{\frac{k}{M}} \qquad (2)$$

Άρα η μάζα M κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T που δίνεται από τη σχέση:

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \stackrel{(2)}{\implies} T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \qquad (3)$$

Η εξίσωση κίνησης $x = x(t)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) και είναι:

$$x(t) = C\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (4)$$

Οι άγνωστες σταθερές C, φ_0 θα προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες. Επειδή αρχικά η μάζα Μ είναι μετατοπισμένη προς τ' αριστερά κατά a έχουμε $x(0) = -a$ (διότι θετική είναι η φορά προς τα δεξιά). Άρα είναι:

$$C\sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = -a \implies C\sin\varphi_0 = -a \qquad (5)$$

και επειδή "αφήνεται" στη θέση αυτή, είναι:

$$v(0) = 0 \implies \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \implies C\cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = 0 \implies$$

$$\cos\varphi_0 = 0 \qquad (6)$$

Είναι $0 \le \varphi_0 < 2\pi$. Έτσι η τελευταία εξίσωση δίνει λύσεις $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 3\pi/2$. Επειδή είναι $C > 0$, $a > 0$ δεκτή είναι η $\varphi_0 = 3\pi/2$ σύμφωνα με τη σχέση (5). Άρα είναι $C = a$. και η σχέση (4) γράφεται:

$$x(t) = a\sin(\omega t + \tfrac{3\pi}{2})$$

Με διαδοχικές παραγωγίσεις αυτής προκύπτει η ταχύτητα και η επιτάχυνση:

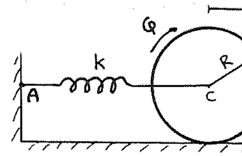
$$v(t) = \dot{x}(t) = a\omega\cos(\omega t + \tfrac{3\pi}{2}) \qquad (7)$$

$$\gamma(t) = \ddot{x}(t) = -a\omega^2\sin(\omega t + \tfrac{3\pi}{2}) \qquad (8)$$

Η έκφραση (8) της επιτάχυνσης συνδέεται με την έκφραση (4) της θέσης με τη σχέση:

$$\gamma(t) = -\omega^2 x(t)$$

Άσκηση 2



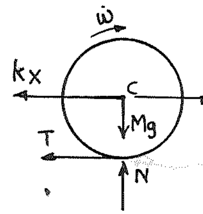
Ο κύλινδρος του σχήματος με μάζα Μ και ακτίνα R μπορεί να κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο οριζόντιο έδαφος. Ο άξονας του κυλίνδρου που παραμένει κάθετος στη διεύθυνση της κίνη[σης έ]χει προσδεθεί στο σταθερό σημείο Α με τη βοήθεια ελατηρίου σταθερής k. Να βρεθεί η περίοδος των τα[λαντώ]σεων του άξονα C του κυλίνδρου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονά του ίση με $MR^2/2$

Λύση

Προφανώς, στην ισορροπία το ελατήριο έχει το φ[υσικό] του μήκος. Θεωρούμε τυχαία φάση όπου ο άξονας έ[χει με]τατοπισθεί κατά x και ο κύλινδρος έχει στραφεί [κατά] φ. Επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση είναι:

$$x = R\varphi \qquad (1)$$



και η δύναμη (στατικής) τριβής σχεδιάστηκε με τυχαία φορά.

Από τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου έχουμε:

$$-kx - T = M\ddot{x} \qquad (2) \qquad\qquad N - Mg = 0$$

και από την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του προκύπτει:

$$\overset{+}{\Sigma M_c} = I_c\dot{\omega} \implies TR = \tfrac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \implies T = \frac{MR}{2}\dot{\omega}$$

Από τη σχέση (1) με παραγώγιση δύο φορές ως προς το χρόνο t παίρνουμε:

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi} \implies \ddot{x} = R\dot{\omega} \qquad (5)$$

Με απαλοιφή των $T, \dot{\omega}$ από τις εξισώσεις (2), (4), (5), παίρνουμε:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3M}x = 0 \qquad (6)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση έχει τη μορφή $\ddot{x} + \underline{o}^2 x = 0$, όπου

$$\underline{o}^2 = \frac{2k}{3M}$$

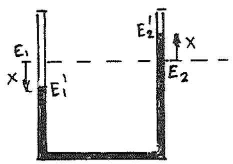
Άρα το κέντρο C του κυλίνδρου κάνει αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\underline{o}$:

$$\underline{o} = \sqrt{\frac{2k}{3M}} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\underline{o}} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}} \quad \Longrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

όπου T είναι η περίοδος της ταλάντωσης.

Σημείωση: Χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο $\underline{o}$ για την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης, αφού με $\omega = \dot{\varphi}$ συμβολίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου...

Άσκηση 3



Ο σωλήνας σταθερής διατομής A του σχήματος περιέχει υγρό με συνολικό μήκος ℓ μέσα στο σωλήνα. Αν διαταράξουμε την ισορροπία του υγρού, να δειχθεί ότι αυτό θα κάνει αρμονική ταλάντωση.

Λύση

Στο σχήμα, η οριζόντια διακεκομένη γραμμή δείχνει τη θέση ισορροπίας των ελευθέρων επιφανειών στα δύο σκέλη του σωλήνα (συγκοινωνούντα δοχεία). Αν διαταράξουμε το υγρό, θεωρούμε την τυχαία φάση όπου η επιφάνεια E_2 έχει ανέβει κατά x. Τότε, επειδή η διατομή του σωλήνα έχει σταθερό εμβαδό A, η επιφάνεια E_1 έχει κατέβει κατά x. Η δύναμη που κινεί το υγρό στη φάση αυτή οφείλεται στο βάρος της στήλης ύψους 2x η οποία βρίσκεται πάνω

$T = 2\pi$

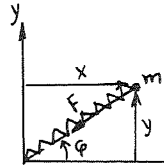
από το επίπεδο της E_1'. Ο όγκος της στήλης ύψους 2x ίσος με $A \cdot 2x$, άρα η μάζα της είναι $\rho A 2x$ και το β
της $\rho A 2x \cdot g$. Η μάζα όλου του κινούμενου υγρού είναι
Η δύναμη έχει αντίθετη φορά με τη μετατόπιση x. Α

$$-\rho A 2x g = (\rho A \ell)\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{2g}{\ell}x = 0$$

δηλαδή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω=

Άσκηση 4

Σημειακή μάζα m κινείται χωρίς τριβή σε οριζόντιο τ
προσδεμένη με (αβαρές) ελατήριο, σταθερής k και μηδενικ
σικού μήκους, του οποίου το άλλο άκρο έχει προσδεθεί σ
θερό σημείο O (αρχή αξόνων). Τη χρονική στιγμή t=0
μα βρίσκεται στη θέση $(0, y_0)$ και έχει ταχύτητα $(v_0, 0$
α) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης x(t), y(t) β) Να βρ
εξίσωση τροχιάς



Λύση

α) Θεωρούμε τυχαία θέση (x,y) της μάζας m. Στη θέση αυτή, η μάζα m δέχεται τη δύναμη του ελατηρίου $\underset{\sim}{F}$ που έχει μέτρο

$$|\underset{\sim}{F}| = k\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1)$$

αφού το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι μηδενικό. Εχ

$$-F\cos\varphi = m\ddot{x} \qquad -F\sin\varphi = m\ddot{y}$$

και επειδή είναι $\cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}$, $\sin\varphi = y/\sqrt{x^2+y^2}$ οι εξ
αυτές γράφονται λόγω και της (1):

$$\{-kx = m\ddot{x} \qquad -ky = m\ddot{y}\} \quad \Longrightarrow$$

$\sqrt{\frac{3M}{2k}}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

Καθεμία απ' αυτές παριστάνει αρμονική ταλάντωση με $\omega^2 = k/m$. Ετσι οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad y(t) = \Gamma\sin\omega t + \Delta\cos\omega t$$

Επειδή αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $(0, y_0)$ έχουμε $x(0)=0$, $y(0)=y_0$, οπότε βρίσκουμε $B=0$, $\Delta=y_0$. Επειδή το σωματίδιο έχει αρχική ταχύτητα $(u_0, 0)$ έχουμε

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = u_0 \Rightarrow A\omega\cos 0 - B\omega\sin 0 = u_0 \Rightarrow A\omega = u_0 \Rightarrow A = u_0/\omega$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow \Gamma\omega\cos 0 - \Delta\omega\sin 0 = 0 \Rightarrow \Gamma = 0$$

Ετσι οι ευφράσεις των $x(t)$, $y(t)$ παίρνουν την τελική μορφή:

$$x(t) = \frac{u_0}{\omega}\sin\omega t \qquad y(t) = y_0\cos\omega t$$

b) Για την εξίσωση τροχιάς, από τις σχέσεις

$$x = \frac{u_0}{\omega}\sin\omega t \qquad y = y_0\cos\omega t$$

απαλείφουμε το χρόνο t. Αυτό γίνεται με χρήση της ταυτότητας

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{\frac{u_0}{\omega}}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1 \qquad (2)$$

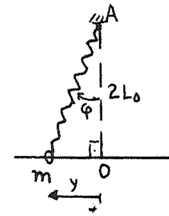
αφού είναι

$$\sin\omega t = \frac{x}{\frac{u_0}{\omega}}, \qquad \cos\omega t = \frac{y}{y_0}$$

από τις εξισώσεις κίνησης. Από την εξίσωση (2) φαίνεται ότι η τροχιά είναι έλλειψη με ημιάξονες u_0/ω, y_0.

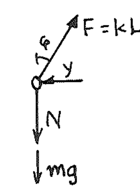
'Ασκηση 5

Ενας κρίκος μάζας m είναι περασμένος σε ευθύγραμμη ράβδο. Ο κρίκος συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k και φυσικού



μήκους L_0 με το σταθερό σημείο A, το οποίο απέχει $2L_0$ από τη ράβδο. Μεταξύ κρίκου και ράβδου δεν υπάρχει τριβή και έτσι η μάζα ισορροπεί στη θέση, όπου το ελατήριο είναι κάθετο στη ράβδο. Να δειχθεί ότι για μικρές κινήσεις η μάζα m κάνει αρμονική ταλάντωση και να βρεθεί η περίοδος.

Λύση



Θεωρούμε τυχαία θέση της μάζας, που περιγράφεται από μεταβλητή y ή τη γωνία φ. Επειδή η γωνία φ είναι μικρ[ή] είναι $\cos\varphi \simeq 1$ και το μήκος του ελατηρίου στην τυχαία θέση είναι $2L_0/\cos\varphi \simeq 2L_0$. Ετσι η m δέχεται δύναμη F από το ελατήριο, με μέτρο kL_0 αφού η επιμήκυνση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό μήκος είναι $2L_0 - L_0 = L_0$. Επίσης δέχεται το βάρος mg και την κάθετη δύναμη N. (Το επίπεδο του σχήματος είναι το κατακόρυφο). Με θετική τη φορά του y, κατά τη διεύθυνση της κίνησης έχουμε:

$$-F\sin\varphi = m\ddot{y} \Rightarrow -kL_0\sin\varphi = m\ddot{y} \qquad (1)$$

Επειδή όμως η γωνία φ είναι μικρή, έχουμε:

$$\sin\varphi \simeq \tan\varphi = y/2L_0$$

Ετσι η σχέση (1), με αντικατάσταση του $\sin\varphi$ γίνεται:

$$-kL_0 \cdot \frac{y}{2L_0} = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{2m}y = 0 \qquad (2)$$

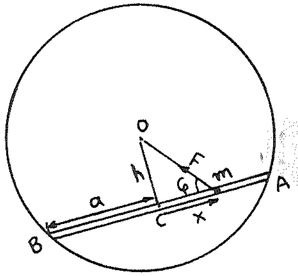
Είναι φανερό ότι η διαφορική εξίσωση (2) παριστάνει αρ[μονι]κή ταλάντωση με

$$\omega^2 = \frac{k}{2m} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{2m}{k}\right)^{1/2}$$

Άσκηση 6

Δύο πόλεις Α,Β στην επιφάνεια της γής, συνδέονται με σήραγγα μήκους 2α. Ενα σώμα αφήνεται να πέσει μέσα στη σήραγγα στην πόλη Α. Αν R είναι η ακτίνα της γης και G η σταθερή παγκόσμιας έλξης, να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης

Λύση



Εστω ότι η μάζα m βρίσκεται στη θέση x ως προς το μέσο C της σήραγγας, άρα απέχει από το κέντρο της γής O απόσταση ίση με $(x^2+h^2)^{1/2}$. Η m δέχεται δύναμη F από το τμήμα M' της γής που έχει κέντρο O και ακτίνα $(x^2+h^2)^{1/2}$. Η F δίνεται από τη σχέση:

$$F = G\frac{mM'}{(x^2+h^2)} \qquad (1)$$

Ομως αν M η μάζα της γής τότε ο λόγος των M, M' είναι ίσος με το λόγο των αντιστοίχων όγκων:

$$\frac{M'}{M} = \frac{\frac{4}{3}\pi(x^2+h^2)^{3/2}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M' = \frac{M}{R^3}(x^2+h^2)^{3/2}$$

και επομένως η σχέση (1) δίνει

$$F = G\frac{Mm}{R^3}(x^2+h^2)^{1/2} \qquad (2)$$

Με θετική τη φορά του βέλους x έχουμε:

$$-F\cos\varphi = m\ddot{x} \Rightarrow -G\frac{Mm}{R^3}(x^2+h^2)^{1/2}\cos\varphi = m\ddot{x}$$

και επειδή $\cos\varphi = x/(x^2+h^2)^{1/2}$ παίρνουμε

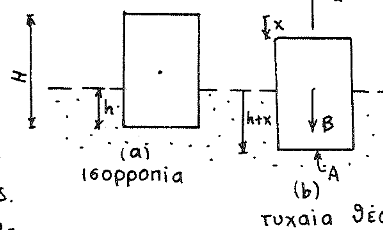
$$-\frac{GM}{R^3}x = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{GM}{R^3}x = 0$$

δηλαδή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\pi/\omega = 2\pi\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$

Άσκηση 7

Ενα πρισματικό σώμα με εμβαδό διατομής Α και ύψος H[illegible] ναι βυθισμένο μέσα σε υγρό (ειδικού βάρους ε_υ) κατά ύψος [illegible] Να δειχθεί ότι για μικρές κατακόρυφες κινήσεις το πρισμ[illegible] κό σώμα κάνει αρμονική ταλάντωση της οποίας να υπολο[illegible] σθεί η συχνότητα.

Λύση



Θεωρούμε την τυχαία θέση του σώματος, όπου έχει μετακινηθεί κατά x ως προς τη θέση ισορροπίας. Στην τυχαία θέση ο όγκος του βυθισμένου τμήματος είναι ίσος με $A(h+x)$. Ετσι δέχεται δυναμη άνωσης F_a ίση με $\varepsilon_\upsilon A(h+x)$. [illegible] θετική τη φορά του x έχουμε

$$B - F_a = m\ddot{x} \Rightarrow B - \varepsilon_\upsilon A(h+x) = m\ddot{x} \qquad (1)$$

όπου B, m το βάρος και η μάζα του σώματος. Επειδή η [illegible] σωση (1) περιέχει σταθερές, θεωρούμε τη θέση ισορροπίας που έκουμε δύναμη άνωσης $F_{a0} = \varepsilon_\upsilon hA$ αφού εδώ ο βυθισ[illegible] νος όγκος είναι Ah. Ετσι, η συνθήκη ισορροπίας είναι:

$$B - \varepsilon_\upsilon hA = 0 \qquad (2)$$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$-\varepsilon_\upsilon Ax = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\varepsilon_\upsilon A}{m}x = 0 \qquad (3)$$

δηλαδή αρμονική ταλάντωση με

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon_\upsilon A}{m} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\varepsilon_\upsilon A}{m}\right)^{1/2} \qquad (4)$$

Παρατήρηση: Η σχέση (2) γράφεται: $mg = \varepsilon_\upsilon hA$ και η [illegible] παίρνει τη μορφή

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{h}{g}\right)^{1/2}$$