3. Υδροδυναμική.

3.1. Βασικές αρχές της ροής.

3.1.1. Εισαγωγή.

Μέχρι εδώ, θεωρήσαμε υγρά σε ακινησία, κατάσταση στην οποία το βάρος είναι η μόνη σημαντική δύναμη που αναπτύσσεται. Το παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθεί με επιπλέον έννοιες, που είναι απαραίτητες για τη μελέτη των υγρών σε κίνηση. Η ροή των ρευστών είναι περίπλοκη, και δεν υπόκειται πάντα σε ακριβείς μαθηματικές λύσεις. Ο λόγος είναι ότι, αντίθετα με τα στερεά, τα στοιχεία ενός υγρού μπορεί να κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες και επιταχύνσεις μεταξύ τους.

Οι τρείς βασικότερες αρχές για την μελέτη της κίνησης των ρευστών είναι:

- η αρχή της διατήρησης της μάζας, από την οποία προκύπτει η εξίσωση της συνέχειας,
- η αρχή της διατήρησης της ενέργειας από την οποία προκύπτει η εξίσωση Bernoulli και
- η αρχή της διατήρησης της ορμής.

3.1.2. Ροή ρευστού.

Η ροή ενός ρευστού μπορεί να είναι σταθερή ή ασταθής, ομοιόμορφη ή μη-ομοιόμορφη, στρωτή ή τυρβώδης, μονο-διάστατη, δι-διάστατη ή τρισδιάστατη και περιστροφική ή μή-περιστροφική.

Πραγματική μονοδιάστατη ροή ενός ασυμπίεστου ρευστού συμβαίνει όταν η διεύθυνση και το μέγεθος της ταχύτητας σε όλα τα σημεία της ροής είναι τα ίδια. Ωστόσο, μονοδιάστατη ανάλυση μιάς ροής είναι αποδεκτή όταν η μόνη διάσταση που λαμβάνεται υπόψη είναι αυτή κατά μήκος της κεντρικής γραμμής ροής της ροής, και όταν οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις που είναι κάθετες στη γραμμή αυτή είναι αμελητέες. Σ'αυτές τις περιπτώσεις μέσες τιμές της ταχύτητας, της πίεσης και του υψομέτρου λαμβάνονται υπόψη, αντιπροσωπεύοντας τη ροή σαν σύνολο, και οι μικρές αποκλίσεις θεωρούνται αμελητέες. Για παράδειγμα, η ροή σε καμπύλους αγωγούς αναλύεται μέσω ανάλυσης μονοδιάστατης ροής, παρόλο που η δομή της έχει τρείς διαστάσεις, και παρόλο που η ταχύτητα ποικίλει στα σημεία κάθε διατομής κάθετης στη ροή. Αυτή η ανάλυση χρησιμοποιείται κατά κόρον στα προβλήματα που αντιμετωπίζει ο Μηχανικός.

3.1.3. Σταθερή ροή.

Σταθερή ροή συμβαίνει όταν σε κάθε σημείο, η ταχύτητα των διαδοχικών σωματιδίων του υγρού είναι η ίδια σε διαδοχικές χρονικές περιόδους, δηλαδή δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο. Ωστόσο μπορεί να μεταβάλλεται σε διαφορετικά σημεία, δηλαδή σε σχέση με την απόσταση, με το διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι και τα άλλα σημαντικά μεγέθη, δηλαδή η πίεση, η πυκνότητα και η παροχή, δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Τα περισσότερα προβλήματα του μηχανικού αναφέρονται σε συνθήκες σταθερής ροής. Για παράδειγμα, τα προβλήματα μεταφοράς υγρών μέσω αγωγών με σταθερό φορτίο, είναι προβλήματα σταθερής ροής. Αυτές οι ροές μπορεί να είναι ομοιόμορφες ή όχι.

3.1.4. Ομοιόμορφη ροή.

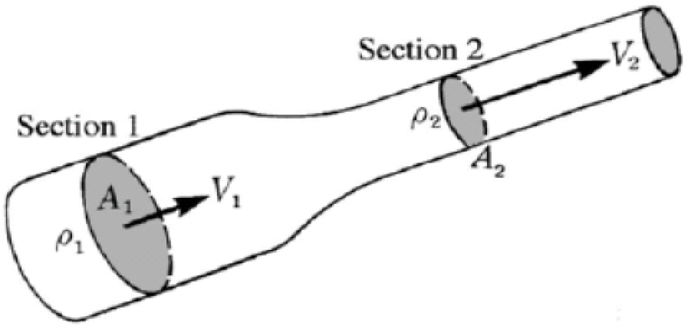
Ομοιόμορφη ροή συμβαίνει όταν το μέγεθος και η διεύθυνση της ταχύτητας δεν μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο του υγρού. Αυτό συνεπάγεται ότι και άλλα μεγέθη δεν μεταβάλλονται με τη θέση, όπως η πυκνότητα, το βάθος ροής, η πίεση κλπ. Οι ροές υγρών υπό πίεση σε αγωγούς μεγάλου μήκους και σταθερής διαμέτρου, είναι ομοιόμορφες είτε η ροή είναι σταθερή είτε όχι. Μη-ομοιόμορφη ροή συμβαίνει όταν η ταχύτητα, το βάθος ροής, η πίεση κλπ, μεταβάλλονται με τη θέση.

3.1.5. Γραμμές ροής.

Οι γραμμές ροής είναι φανταστικές καμπύλες που σχεδιάζονται για να δείξουν την διεύθυνση της κίνησης σε διάφορες διατομές της ροής του υγρού. Η εφαπτομένη σε κάθε σημείο δείχνει την στιγμιαία διεύθυνση της ταχύτητας των σωματιδίων του ρευστού στο συγκεκριμένο σημείο.

3.1.6. Διατήρηση της μάζας – Εξίσωση της συνέχειας.

Από την αρχή της διατήρησης της μάζας, από το ότι δηλαδή η μάζα που περνάει από κάποια συγκεκριμένη διατομή της ροής θα περάσει και από οποιαδήποτε άλλη κατάντη ή ανάντη της πρώτης, προκύπτει η εξίσωση της συνέχειας. Η εξίσωση της συνέχειας σημαίνει πρακτικά ότι η παροχή διατηρείται σταθερή σε κάθε σημείο της γραμμής ροής. Οτι δηλαδή, σε οποιοδήποτε δεδομένο χρονικό διάστημα, θα περάσει ίση μάζα ρευστού από οποιαδήποτε διατομή. Αυτό σημαίνει αρχικά ότι η μάζα που περνάει από κάποια διατομή στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή το γινόμενο της διατομής επί την ταχύτητα επί την πυκνότητα, είναι σταθερό, δηλαδή το ίδιο και σε κάποια άλλη διατομή. Αυτό εκφράζεται στην εξίσωση που ακολουθεί στο σχήμα 32.



$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Σχήμα 32. Η εξίσωση της συνέχειας.

Αυτή η εξίσωση, όταν πρόκειται για ασυμπίεστη ροή, όπου η πυκνότητα είναι σταθερή, μετατρέπεται στην απλούστερη: $A_1 \cdot U_1 = A_2 \cdot U_2$. Διαμορφώνεται δε ανάλογα με την διατομή, για παράδειγμα για κυκλική διατομή δίνει $U_1 \cdot D_1^2 = U_2 \cdot D_2^2$

3. ΚΙΝΗΣΗ ΡΕΥΣΤΟΥ-ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

❑ Κίνηση σωματιδίων ρευστού

- Δύναμη, επιτάχυνση
- F = mα εφαρμογή στην κίνηση σωματιδίου

❑ Δεύτερος νόμος του NEWTON

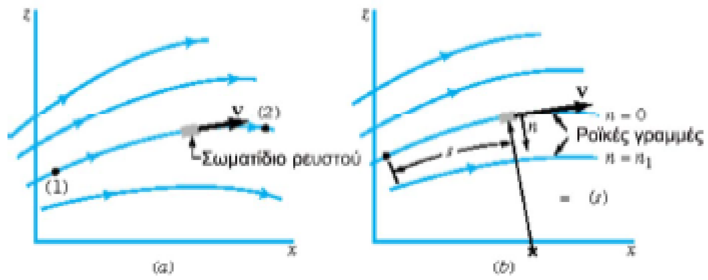
- Επιτάχυνση

F = mα

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

- Ρευστά χωρίς ιξώδες
- Πίεση-Βαρύτητα
- Συστήματα συντεταγμένων x,y,z r,θ,z
- Μόνιμη ροή $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Προσδιορισμός της επιτάχυνσης

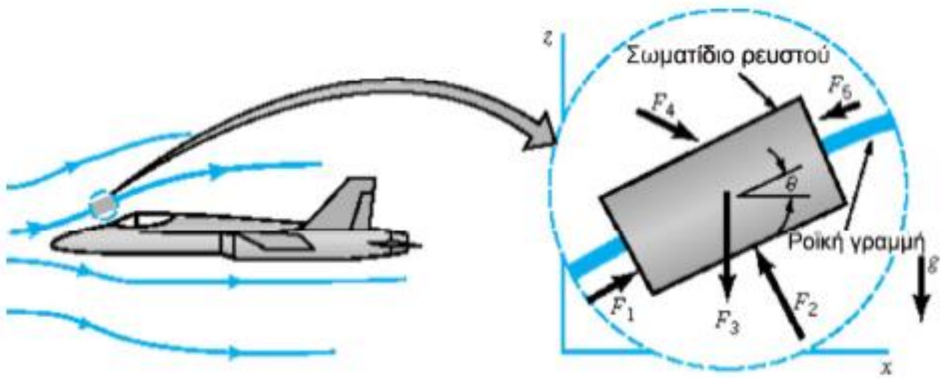


- $U = \dfrac{ds}{dt}$
- $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{U}}{dt} \qquad \alpha_n, \alpha_s$
- $\alpha_s = \dfrac{dU}{dt} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial s}\right)\left(\dfrac{ds}{dt}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial s} U$
- $\alpha_n = \dfrac{U^2}{R}$

R = ακτίνα καμπυλότητας της ροικής γραμμής

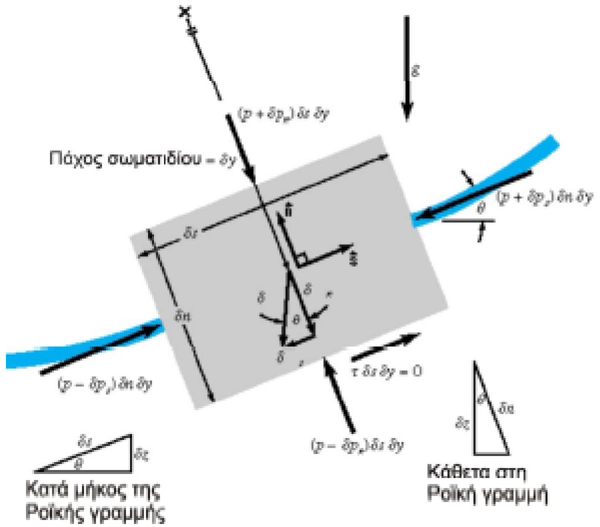
s = απόσταση απο κάποιο αυθαίρετο σημείο κατα μήκος μιας ροικής γραμμής

Προσδιορισμός των δυνάμεων



Διάγραμμα «Ελευθέρου Σώματος» για ένα ροϊκό σωματίδιο

F=mα κατά μήκος μίας Ροϊκής Γραμμής



•Για μόνιμη ροή η εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton στη διεύθυνση s δίνει:

$$\sum \delta F_s = \delta m U \frac{\partial U}{\partial s} = \rho \delta V U \frac{\partial U}{\partial s} \quad (1)$$

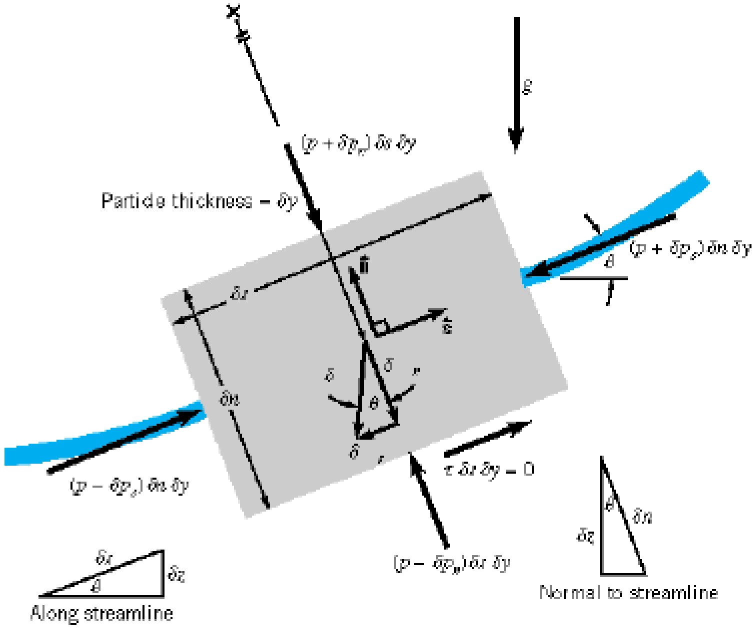
•Η συνιστώσα του βάρους στην διεύθυνση μίας ροϊκής γραμμής εξαρτάται από τη γωνία της ροϊκής γραμμής

$$\delta W_s = -\delta W \sin \partial = -\gamma \delta V \sin \partial$$

•Η τελική δύναμη λόγω πίεσης προσδιορίζεται από την κλίση (βαθμίδα) πίεσης

$$\delta F_{ps} = -\frac{\partial p}{\partial s} \delta V$$

(συνέχεια) F=ma κατά μήκος μίας Ροϊκής Γραμμής



•Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-\gamma \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho U \frac{\partial U}{\partial s} = \rho \alpha_s \qquad (2)$$

•που από φυσική άποψη,σημαίνει ότι

η μεταβολή της ταχύτητας του ροϊκού σωματιδίου εξαρτάται απο την κλίση πίεσης και από το βάρος του σωματιδίου κατά μήκος της ροϊκής γραμμής

$$-\gamma \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2}\rho \frac{d\left(U^2\right)}{ds}$$

απλοποιείται σε $dp = \frac{1}{2}\rho d\left(U^2\right) + \gamma dz = 0$

και με ολοκλήρωση γίνεται

$$\int \frac{\mathbf{dp}}{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{U}^2 + \mathbf{gz} = \mathbf{c}$$ (c=σταθερά ολοκλήρωσης)

- Για ρ=σταθερό (ασυμπίεστη ροή) έχουμε την εξίσωση Bernoulli

$$\boxed{\mathbf{p} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\rho}\mathbf{U}^2 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{z} = \textbf{σταθερό}}$$ (κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής)

- Η εξίσωση Bernoulli μπορεί να γραφεί και με μορφή «φορτίων»

$$\frac{\mathbf{p}}{\boldsymbol{\gamma}}+\frac{\mathbf{U}^2}{\mathbf{2g}}+\mathbf{z}= \textbf{σταθερό}$$

(κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής)

$\frac{p}{\gamma}=$ πιεζομετρικό «φορτίο»

$\frac{U^2}{2g}=$ «φορτίο» ταχύτητας

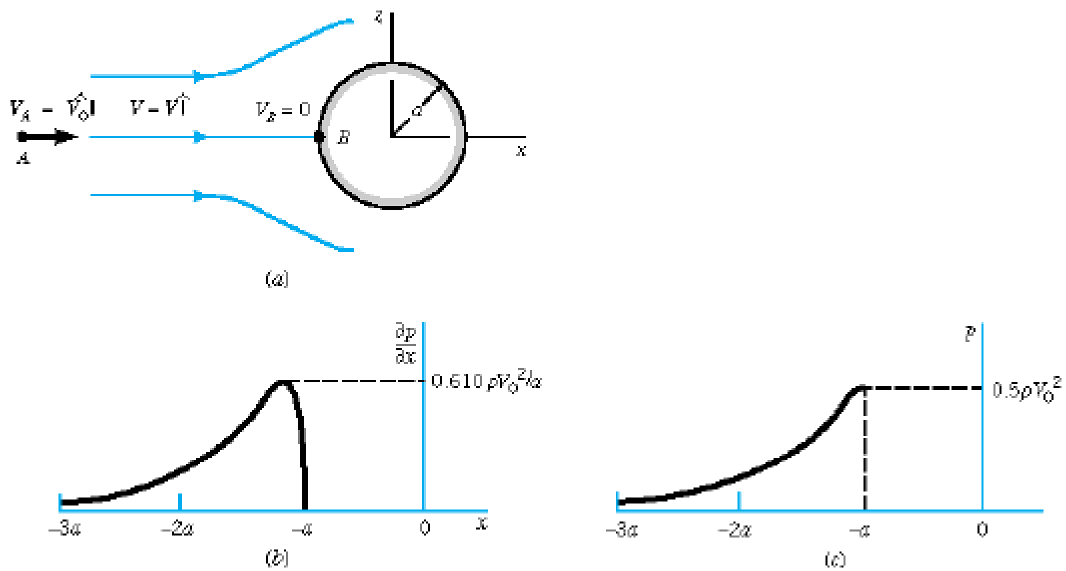
$z=$ δυναμικό «φορτίο»

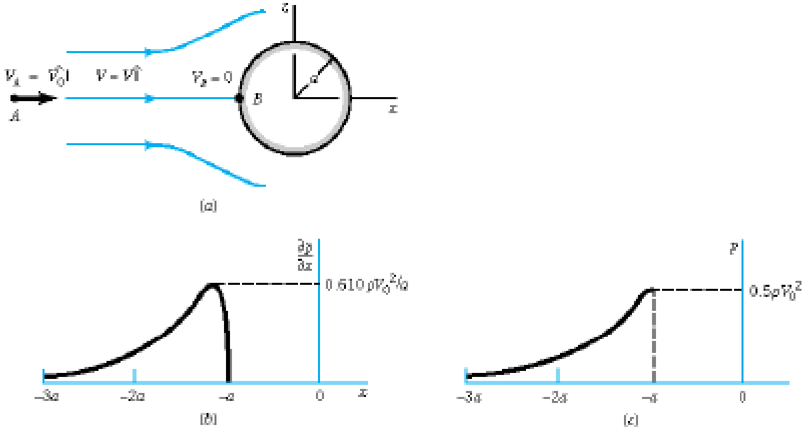
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Εξετάζουμε την μη συνεκτική, ασυμπίεστη, μόνιμη ροή κατά μήκος της ροϊκής γραμμής Α-Β μπροστά από μία σφαίρα ακτίνας α. Η ταχύτητα ροής κατά μήκος της ροϊκής αυτής γραμμής δίνεται από τη σχέση

$$U = U_0\left(1+\frac{\alpha^3}{x^3}\right)$$

Να προσδιορισθεί η μεταβολή της πίεσης από το σημείο Α μακριά από τη σφαίρα ($x_A=-\infty$ και $U_A=U_0$) στο σημείο Β επάνω στη σφαίρα ($x_B=-\alpha$ και $U_B=0$)





Ισχύει η εξίσωση

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial s}$$

(Ροή μη συνεκτική, μόνιμη και sin∂=0)

Με τη δεδομένη σχέση για την ταχύτητα, ο όρος της επιτάχυνσης γράφεται

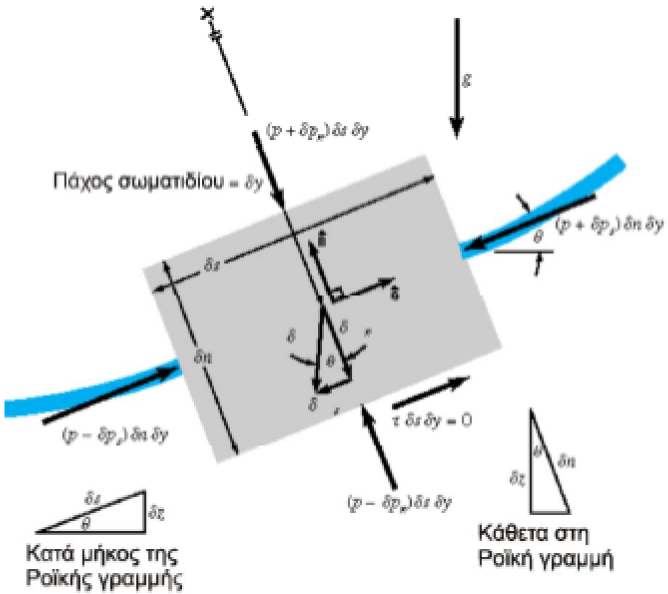
$$U\frac{\partial U}{\partial s} = U\frac{\partial U}{\partial x} = U_0\left(1+\frac{\alpha^3}{x^3}\right)\left(-\frac{3U_0\alpha^3}{x^4}\right) = -3U_0^2\left(1+\frac{\alpha^3}{x^3}\right)\frac{\alpha^3}{x^4}$$

Προκύπτει ότι $U\frac{\partial U}{\partial x} < 0$,δηλαδή το ρευστό επιβραδύνεται

Επομένως $$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3\rho\alpha^3 U_0^2\left(1+\frac{\alpha^3}{x^3}\right)}{x^4}$$

Το σχήμα (b) δείχνει τη μεταβολή του ∂ p/ ∂ x κατά μήκος της γραμμής και το (c) τη μεταβολή της πίεσης

F=ma κάθετα σε μία Ροϊκή Γραμμή



•Εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton στη διεύθυνση n για μόνιμη ροή:

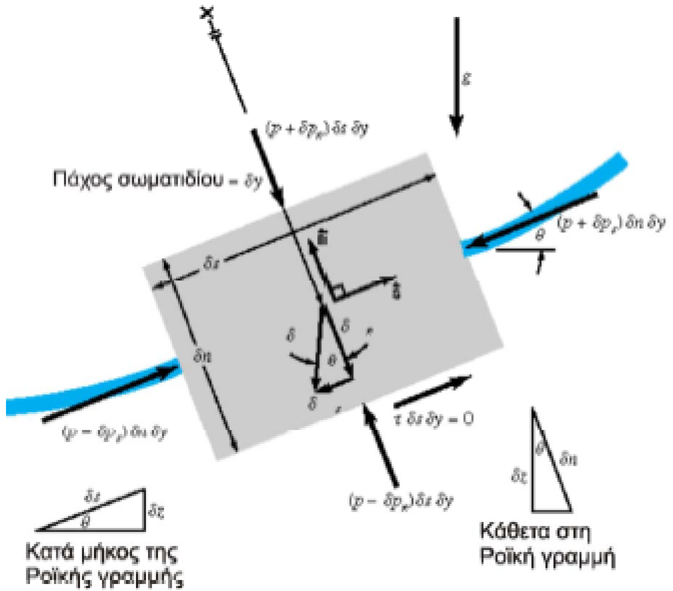
$$\sum \delta F_s = \frac{\delta m U^2}{R} = \frac{\rho \delta V U^2}{R}$$

•Η συνιστώσα του βάρους στη διεύθυνση n είναι

$$\delta W_n = -\delta W \cos\partial = -\gamma \delta V \cos\partial$$

•Η συνιστώσα της δύναμης λόγω πίεσης στη διεύθυνση n είναι

$$\delta F_{pn} = -\frac{\partial p}{\partial n}\delta V$$



•Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-\gamma\delta V\cos\partial-\frac{\partial p}{\partial n}\delta V=-\frac{\rho\delta VU^2}{R}\quad \acute{\eta}$$

$$-\gamma\frac{dz}{dn}-\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{\rho U^2}{R}$$

που από φυσική άποψη,σημαίνει ότι η μεταβολή της διεύθυνσης της ροής ενός σωματιδίου οφείλεται στη κλίση πίεσης και το βάρος του σωματιδίου στη διεύθυνση n

- Για αμελητέα βαρύτητα ή οριζόντια ροή έχουμε:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho U^2}{R}$$

* αύξηση της πίεσης με την απόσταση από το κέντρο καμπυλότητας

- Ολοκλήρωση στη διεύθυνση n δίνει

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{U^2}{R} dn + gz = \text{σταθερό}$$ κάθετα σε μία ροϊκή γραμμή

Για μόνιμη, ασυμπίεστη, μη συνεκτική ροή έχουμε

$$\boxed{p + \rho \int \frac{U^2}{R} dn + gz = \text{σταθερό}}$$ (κάθετα σε μία ροϊκή γραμμή)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνονται δύο ροϊκά πεδία με κυκλικές ροϊκές γραμμές. Οι

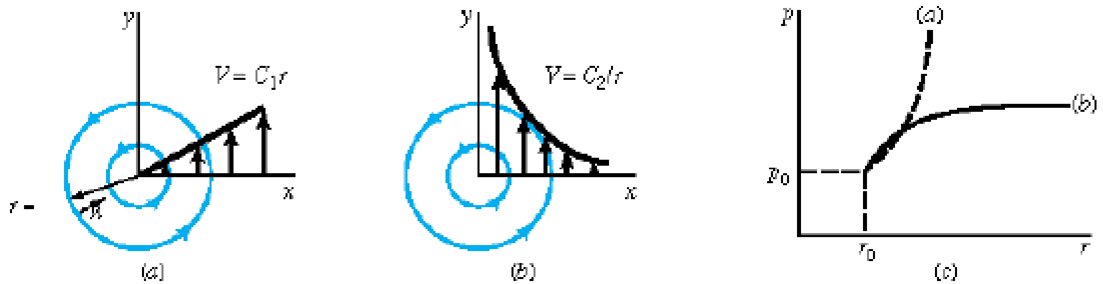
κατανομές της ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις

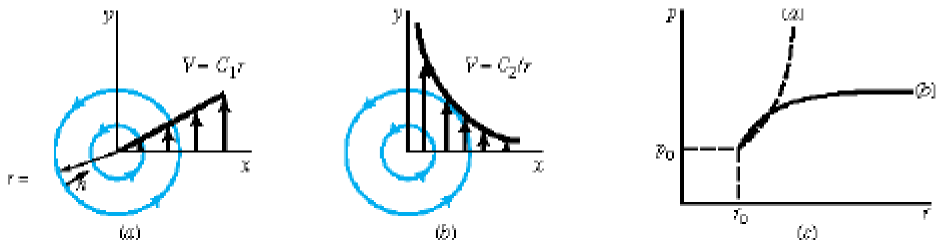
$$\mathbf{U(r) = C_1 r} \quad \text{για την } (\alpha) \text{ και}$$

$$\mathbf{U(r) = \frac{C_2}{r}} \quad \text{για την } (\beta) \quad C_1, C_2 = \text{σταθερές}$$

Να προσδιορισθεί η κατανομή της πίεσης $p=p(r)$ για κάθε περίπτωση με

δεδομένο ότι $p=p_0$ στη θέση $r=r_0$.





- Η εξίσωση που ισχύει είναι

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho U^2}{r}$$

- Για την (α) η εξίσωση δίνει

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho C_1^2 r$$

και για την (β) $\quad \dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{\rho C_2^2}{r^3}$

•Και στις δύο περιπτώσεις η p αυξάνει με αύξηση του r $\left(\dfrac{\partial p}{\partial r} > 0\right)$

•Με ολοκλήρωση έχουμε

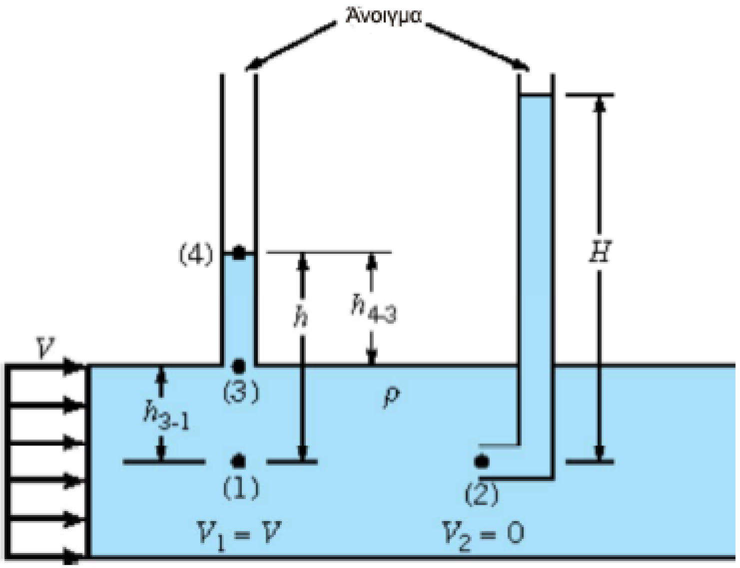
$$p = \frac{1}{2}\rho C_1^2\left(r^2 - r_0^2\right) + p_0 \quad (\alpha)$$

$$p = \frac{1}{2}\rho C_2^2\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + p_0 \quad (\beta)$$

Η (α) αντιστοιχεί σε κίνηση στερεού σώματος

Η (β) αντιστοιχεί σε ελεύθερη «δίνη» (λαίλαπα-tornado)

Στατική-Δυναμική Πίεση-Ολική (Πίεση Ανακοπής) Πίεση



•Μετατροπή της κινητικής ενέργειας της ροής σε «ανύψωση πίεσης»

(α) p=θερμοδυναμική πίεση

(<u>Στατική</u>)

$$p_1 = \gamma h_{3-1} + p_3 = \gamma h$$

(β) γz="υδροστατική" πίεση

(λόγω μεταβολής υψομέτρου)

(γ) $\dfrac{\rho U^2}{2} =$ δυναμική πίεση

(2) Σημείο ανακοπής

U_2=0 (ρευστό στο σωλήνα ακίνητο)

(συνέχεια) Στατική-Δυναμική Πίεση-Ολική (Πίεση Ανακοπής) Πίεση

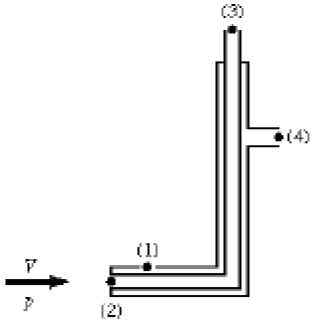
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2$$

• Σημείο ανακοπής σε κάθε σώμα που βρίσκεται μέσα στη ροή

$$p_{ο\lambda} = p + \frac{1}{2}\rho U^2 + \gamma z = \text{ σταθερή}$$

κατά μήκος ροϊκής γραμμής

(συνέχεια) Στατική-Δυναμική Πίεση-Ολική (Πίεση Ανακοπής) Πίεση



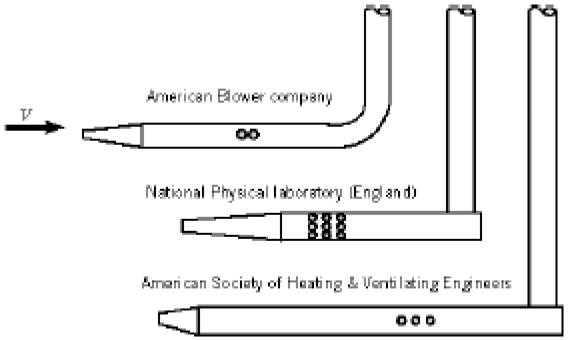
$$\left.\begin{array}{l}\text{Στατική Πίεση}\\ \\ \text{Ολική Πίεση}\end{array}\right\}\ \text{Ταχύτητα}$$

$$p_3 = p + \frac{1}{2}\rho U^2$$

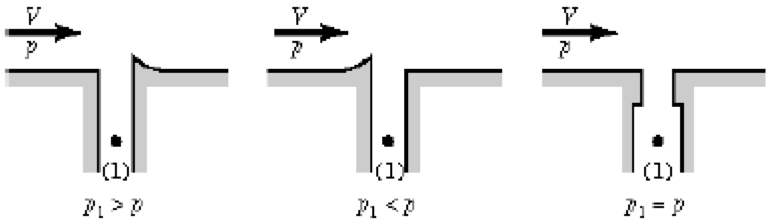
$$p_4 = p_1 = p$$

$$p_3 - p_4 = \frac{1}{2}\rho U^2$$

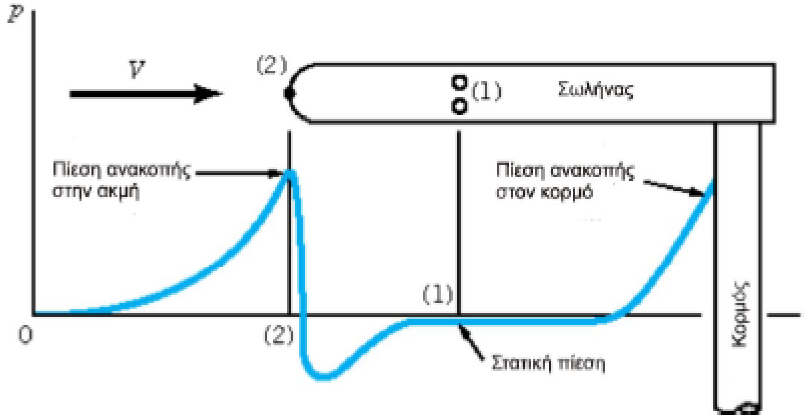
$$U = \sqrt{\frac{2(p_3 - p_4)}{\rho}}$$



(συνέχεια) Στατική-Δυναμική Πίεση-Ολική (Πίεση Ανακοπής) Πίεση



Σωστός σχεδιασμός για την ακριβή μέτρηση της στατικής πίεσης

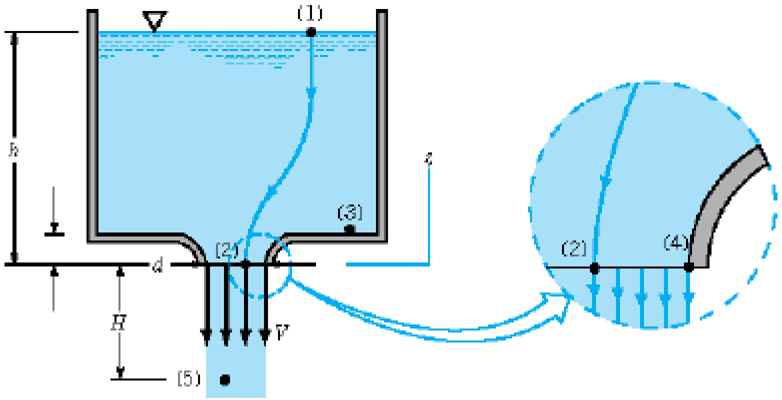


Κατανομή πίεσης κατά μήκος ενός σώματος βυθισμένου στη ροή

•Περιοχή με $p<p_{στατικής}$

Εφαρμογές της εξίσωσης Bernoulli

(α) Ροή από Στόμιο – Ελεύθερες φλέβες (jets)

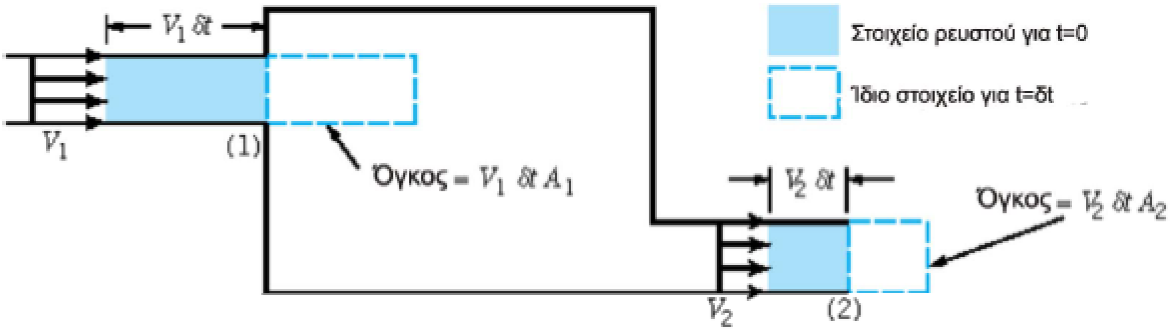


$z_1 = h, \quad z_2 = 0, \quad V_1 \cong 0, \quad p_1 = 0$ (Σχετική πίεση), $p_2 = 0$ (Ελεύθερη πίεση)

$$\gamma h = \frac{1}{2}\rho V^2 \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

Στο σημείο 5 $\quad V = \sqrt{2g(h+H)}$

Χρήση Εξίσωσης Bernoulli και Εξίσωσης Συνεχείας



Παροχή μάζας $\dot{m} = \rho Q$,Q=παροχή όγκου

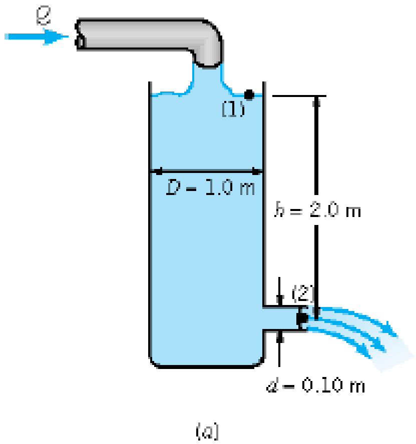
$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{V}}{\boldsymbol{\delta}\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{UA}\boldsymbol{\delta}\mathbf{t}}{\boldsymbol{\delta}\mathbf{t}} = \mathbf{UA}$$ U=ταχύτητα

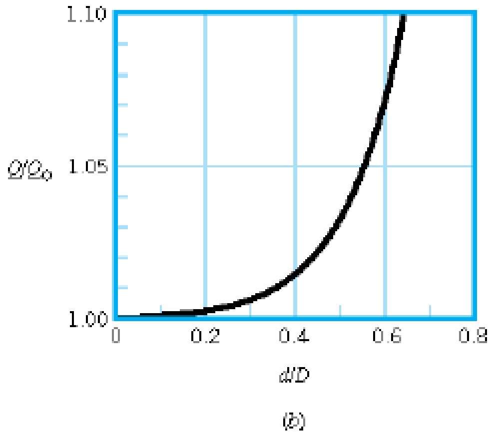
$$m = \rho U A$$

$$\dot{\mathbf{m}}_1 = \dot{\mathbf{m}}_2 \Rightarrow \rho_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{A}_1 = \rho_2 \mathbf{U}_2 \mathbf{A}_2 \Rightarrow \mathbf{U}_1 \mathbf{A}_1 = \mathbf{U}_2 \mathbf{A}_2$$

$$\gamma\iota\alpha\ A_1 = \frac{A_2}{2} \Rightarrow U_1 = 2U_2$$

Νερό εκρέει από δεξαμενή διαμέτρου D=1.0m μέσω μιας οπής διαμέτρου 0.1m. Να προσδιορισθεί η παροχή Q αν το βάθος ροής στη δεξαμενή παραμένει σταθερό h=2.0m.



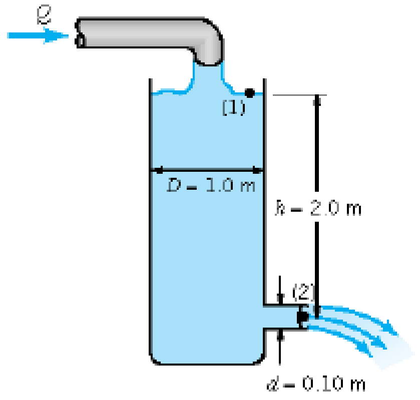


ΛΥΣΗ

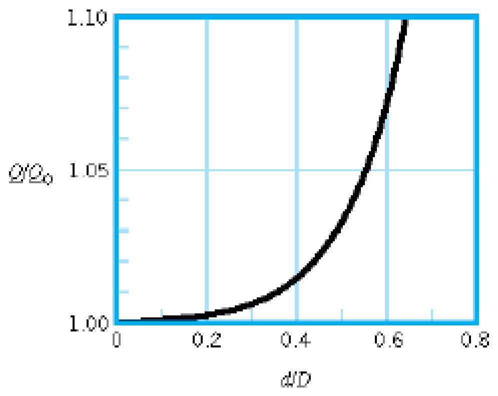
- Για μόνιμη, μη συνεκτική και ασυμπίεστη ροή η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται μεταξύ των (1) και (2) και δίνει

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \gamma z_2 \quad (1)$$

(συνέχεια)



(a)



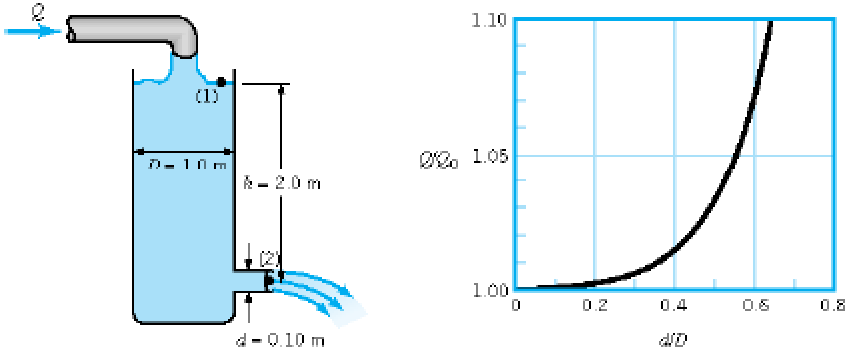
(b)

- Με τις παραδοχές $p_1=p_2=0$ και $z_1=h$, $z_2=0$ η εξίσωση (1) γίνεται

$$\frac{1}{2}U_1^2 + gh = \frac{1}{2}U_2^2 \quad (2)$$

- Η αρχή της διατήρησης της μάζας δίνει $Q_1=Q_2$ όπου $Q=AU$ Επομένως

$$\frac{\pi}{4}\mathbf{D^2U_1} = \frac{\pi}{4}\mathbf{d^2U_2} \quad \text{ή} \quad \mathbf{U_1} = \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{D}}\right)^2 \mathbf{U_2} \quad (3)$$



(a) (b)

- Από (1) και (2)

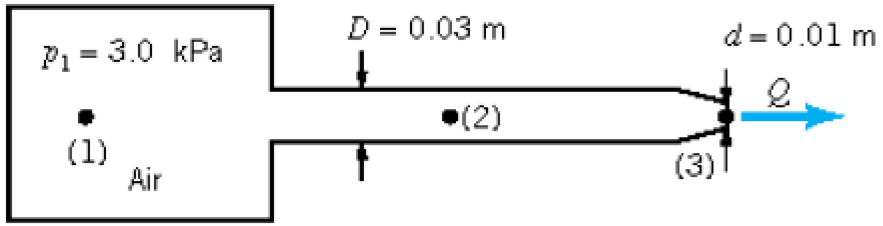
$$U_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d}{D}\right)}} \Rightarrow U_2 = 6.26 \text{ m/s}$$

$$Q = A_1U_1 = A_2U_2 = 0.0492 \text{ m}^3\text{/s}$$

- Αν υποθέσουμε $U_1 \approx 0$ και $U_2^{'} = \sqrt{2gh}$ και $Q' = A_2U_2'$

Το σφάλμα από την υπόθεση αυτή μπορεί να υπολογισθεί από το λόγο των παροχών Q/Q'

Αέρας από μία κλειστή δεξαμενή εκρέει στην ατμόσφαιρα μέσω ενός σωλήνα (D=0.03m) που στην άκρη έχει ακροφύσιο (d=0.01m).
Η πίεση στη δεξαμενή παραμένει σταθερή και ίση με 3.0kPa.
Να υπολογισθεί η παροχή του αέρα και η πίεση στο σωλήνα.



ΛΥΣΗ

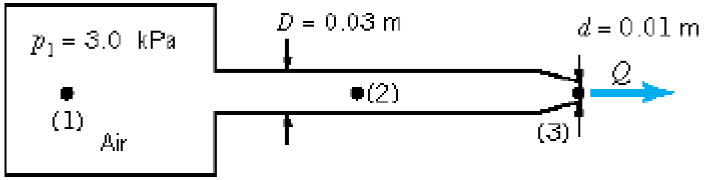
- Εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli δίνει

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \gamma z_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho U_3^2 + \gamma z_3$$

- Με τις παραδοχές $z_1=z_2=z_3$, $U_1=0$ (μεγάλη δεξαμενή) και $p_3=0$ (ατμοσφαιρική πίεση) η εξίσωση γίνεται

$$U_3 = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}} \quad \kappa\alpha\iota \quad p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

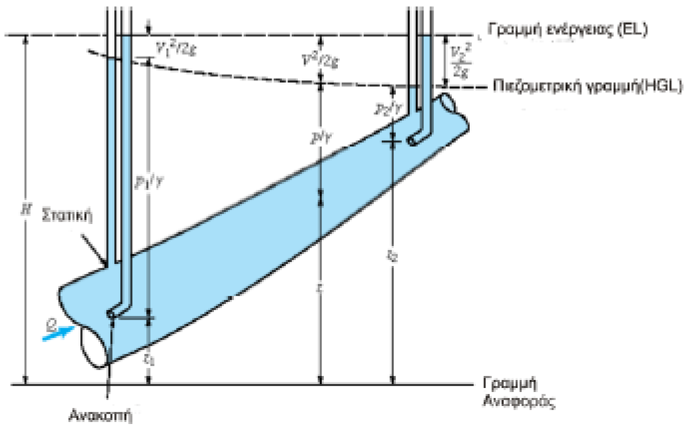
(συνέχεια)

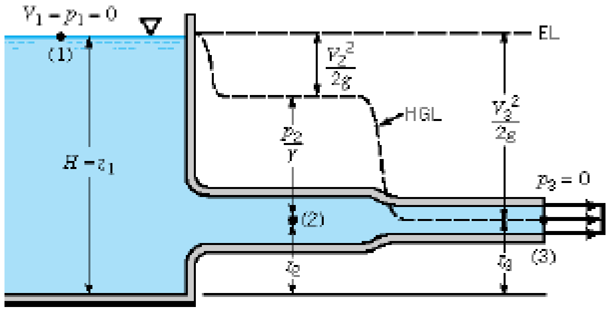


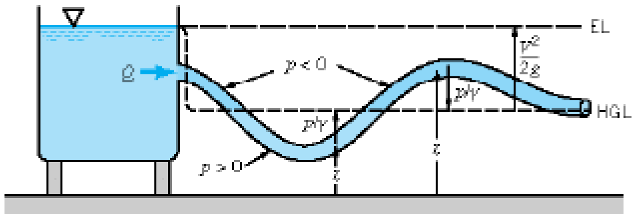
- Για $\rho_{αέρα}$=1.26kg/m^3 έχουμε U_3=69 m/s και $Q=A_3U_3=5.42*10^{-3}$m^3/s

- Η ταχύτητα U_2 είναι $U_2=A_3U_3/U_2=(d/D)^2U_3$=7.67 m/s και η πίεση p_2=2963N/m^2(Pa)

Γραμμή ενέργειας και πιεζομετρική γραμμή



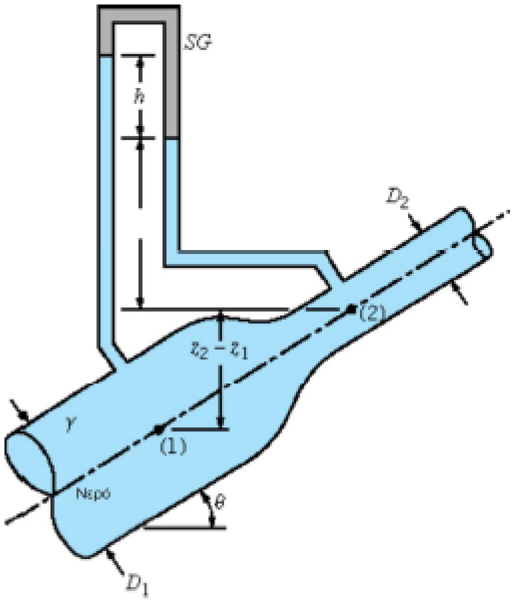




- Γραφική απεικόνιση της εξίσωσης Bernoulli
- Γραμμή ενέργειας: η γραμμή που δείχνει τη συνολική ενέργεια του ρευστού
- Πιεζομετρική γραμμή: η γραμμή που δείχνει το πιεζομετρικό φορτίο p/γ κατά μήκος της ροϊκής γραμμής(σωλήνα)
- Για ροή κάτω από την πιεζομετρική γραμμή, η πίεση p είναι αρνητική

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Νερό ρέει στο σωλήνα του σχήματος. Η μέτρηση της στατικής πίεσης στις διατομές (1) και (2) γίνεται με ένα μανόμετρο τύπου U που περιέχει λάδι πυκνότητας μικρότερης από αυτή του νερού. Να προσδιορισθεί η ένδειξη του μανόμετρου.



ΛΥΣΗ

- Θεωρώντας ροή μόνιμη, ασυμπίεστη και μη συνεκτική η εξίσωση Bernoulli γράφεται

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \gamma z_2 \ (1)$$

- Η εξίσωση συνεχείας γράφεται

$$Q = U_1 A_1 = U_2 A_2 \ (2)$$

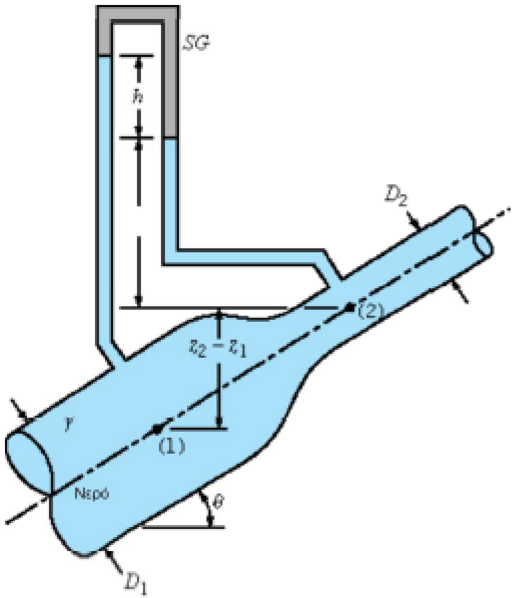
- Η διαφορά πίεσης (p_1-p_2) από το μανόμετρο είναι

$$\mathbf{p_1 - \gamma(z_2 - z_1) - \gamma\ell - \gamma h + \rho_{\mu\alpha\nu} g h + \gamma\ell = p_2 \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + (\rho_{\nu\varepsilon\rho} - \rho_{\mu\alpha\nu}) g h \ (3)}$$

(συνέχεια)

- Από (1),(2) και (3) έχουμε:



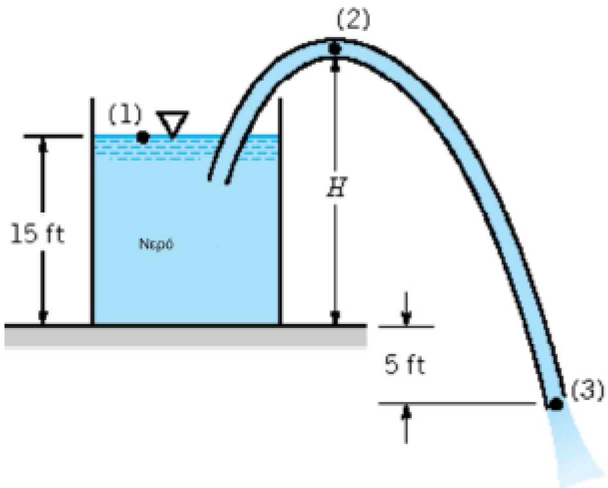
$$\left(\rho_{\nu\varepsilon\rho}-\rho_{\mu\alpha\nu}\right)gh=\frac{1}{2}\rho U_2^2\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right] \quad \text{ή}$$

$$h=\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2\frac{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g\left(1-\frac{\rho_{\mu\alpha\nu}}{\rho_{\nu\varepsilon\rho}}\right)}$$

Το h ανεξάρτητο της γωνίας θ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να προσδιορισθεί το μέγιστο ύψος Η του σωλήνα έτσι ώστε να μην εμφανισθεί σπηλαίωση στο σωλήνα.



ΛΥΣΗ

- Η εξίσωση Bernoulli για τα σημεία (1), (2) και (3) γράφεται:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \gamma z_2 =$$

$$= p_3 + \frac{1}{2}\rho U_3^2 + \gamma z_3 \ (1)$$

Με επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα της δεξαμενής έχουμε:

$z_1 = 5$ m, $z_2 = H$, $z_3 = -1.5$ m, $U_1 = 0$ (μεγάλη δεξαμενή)

$p_1 = 0$ (ατμοσφαιρική πίεση)

$p_3 = 0$ (ελεύθερη φλέβα)

$U_2 = U_3$, $p_2 = \left(2.338 * 10^3 - 101.33 * 10^3\right) = -99.0$ kPa

- Από (1) έχουμε:

$$\mathbf{U_3 = \sqrt{2g\left(z_1 - z_2\right)} = 10.77m / s}$$

- Από (1) έχουμε:

$$\boldsymbol{\gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \gamma z_2 \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow 9810 * 4.5 = -99 * 10^3 + \frac{1}{2} 1000 * 10.77^2 + 9810H \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow H = 18.46\ m}$$