ΘΕΡΙΝΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΤΕΣΤ 1   28/6/2017

Άσκηση 1. (μ.20)
Να βρεθούν το Π.Ο., ο τύπος της αντίστροφης και το Π.Τ. για τις ακόλουθες συναρτήσεις

$(i)\ f(x) = 2e^{-3x} - 1 \qquad (ii)\ g(x) = \sqrt{x^3 - 1}$

Άσκηση 2. (μ.15)
Να γίνουν οι γραφικές των ακόλουθων συναρτήσεων

$(i)\ y = \dfrac{3}{x-2} - 1 \qquad (ii)\ y = |2e^x - 5| \qquad (iii)\ y = \ln(x-1) - 2$

Άσκηση 3. (μ.20)
Να βρεθούν τα ακόλουθα όρια (εάν υπάρχουν)

$(i)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x^2 - 4} \qquad (ii)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^3}{|x-1|}$

$(iii)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{2e^{2x} - e^x} \qquad (iv)\ \lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$

Άσκηση 4. (μ.20)
Να βρεθεί το είδος των ασυνεχειών, αν υπάρχουν, της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)|x+3|}.$$

Άσκηση 5. (μ.15)
Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a, b ώστε η ακόλουθη συνάρτηση να είναι παντού συνεχής.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x > 2 \\ a(x+1) + b, & -1 < x \le 2 \\ 2x^3 + x + 7, & x \ge -1 \end{cases}$$

Άσκηση 6. (μ.10)
Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 5x - 6 = 0$ έχει λύση στο εσωτερικό του διαστήματος $[1,2]$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή $x = (5x+6)^{1/5}$ και να βρείτε τη λύση σε ακρίβεια 3 δεκαδικών.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΣΤ 1

1 (i)

Π.Ο. $f = \mathbb{R}$,

$$y = 2e^{-3x} - 1$$

$$y + 1 = 2e^{-3x}$$

$$\frac{y+1}{2} = e^{-3x}$$

$$\ln\left(\frac{y+1}{2}\right) = -3x$$

$$x = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{y+1}{2}\right),$$

Π.Τ. $f = \{y \in \mathbb{R} : y+1 > 0\} = \{y \in \mathbb{R} : y > -1\} = (-1, \infty)$

1 (ii)

Π.Ο. $g = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 1 \geq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, \infty)$

$$x^3 - 1 = 0$$
$$x^3 = 1$$
$$x = 1$$

		1	
x^3-1	$-$	0	$+$

$$y = \sqrt{x^3 - 1}$$

$$y^2 = x^3 - 1, \quad y \geq 0$$

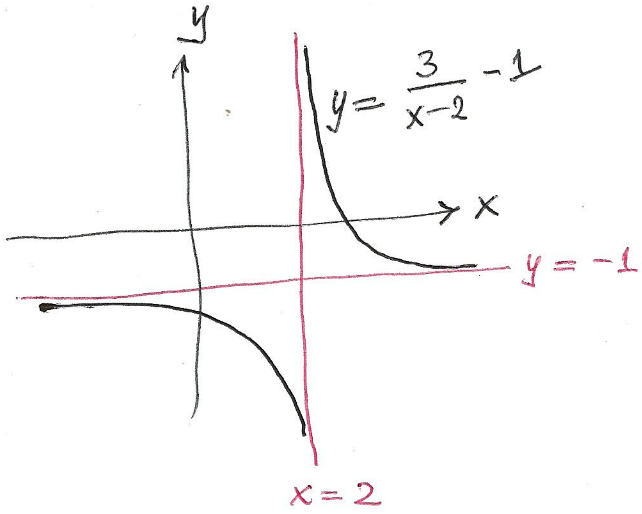
$$y^2 + 1 = x^3, \quad y \geq 0$$

$$x = (y^2+1)^{1/3}, \quad y \geq 0$$

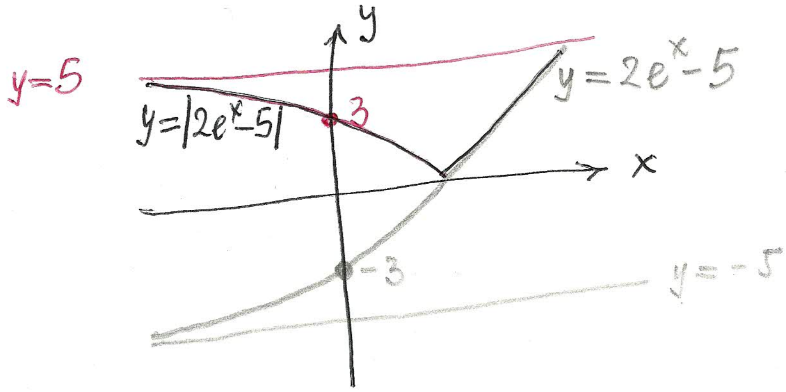
$$f^{-1}(y) = (y^2+1)^{1/3}, \quad y \geq 0$$

Π.Τ. $g = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = [0, \infty)$

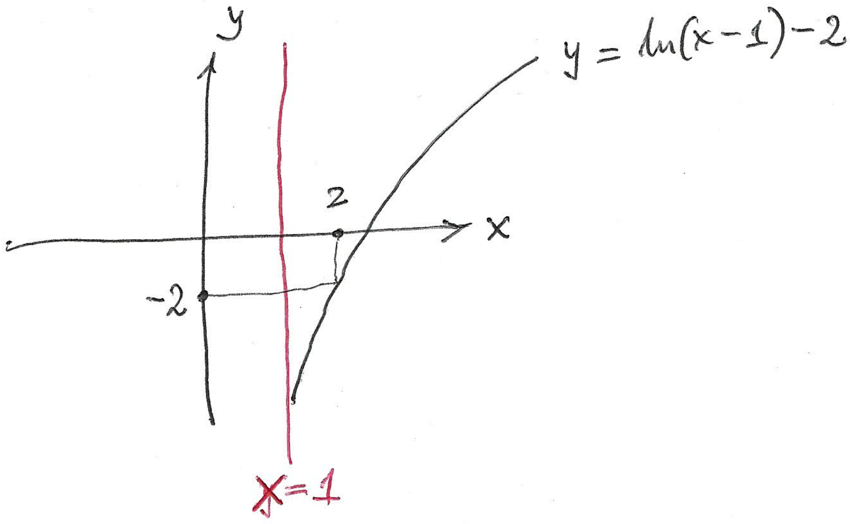
2 (i)



2 (ii)



2 (iii)



3 (i)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4^+-4} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4^--4} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

δεν υπάρχει το όριο

3 (ii)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^3}{|x-1|} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)^3}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^3}{|x-1|} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(x-1)^3}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1} -(x-1)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{|x-1|} = 0.$$

3 (iii)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{2e^{2x}-e^{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{e^{2x}}\,1}{\cancel{e^{2x}}(2-e^{-x})} = \frac{1}{2-e^{-\infty}} = \frac{1}{2}.$$

3 (iv)

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)\cdot \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2+2x)-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

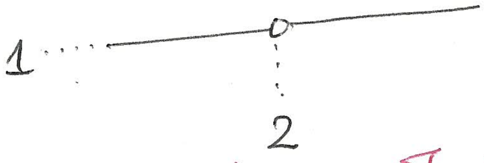
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}} + |x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$\underset{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\ \ 1}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{(x-2)|x+3|}$ $\qquad x \neq 2, -3 \leftarrow$ <u>ασυνέχειες</u>

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} f = \lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}|x+3|} = 1$$



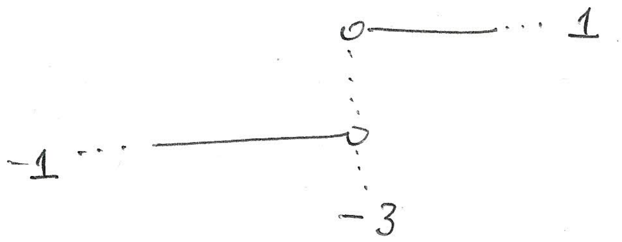
ασυνέχεια στο $x=2$

$$\lim_{x\to(-3)^{+}} f = \lim_{x\to(-3)^{+}} \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}|x+3|}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} \frac{(x+3)}{+(x+3)} = 1$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} f = \lim_{x\to(-3)^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}|x+3|}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -3 \\ x<-3}} \frac{x+3}{-(x+3)} = -1$$



ασυνέχεια στο $x=-3$

5.

$$\lim_{x\to 2^+} f = \lim_{x\to 2} x^2+5 = 9$$

$$\lim_{x\to 2^-} f = \lim_{x\to 2} a(x+1)+b = 3a+b$$

$$f(2) = 3a+b$$

$3a+b=9$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f = \lim_{x\to -1} a\cdot(x+1)+b = 0+b=b$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f = \lim_{x\to -1} 2x^3+x+7 = 2(-1)^3-1+7=4$$

$$f(-1) = 4$$

$b=4$

$$\Rightarrow \quad 3\cdot a+4=9$$

$$a=\frac{5}{3}$$

6.

$$f(x) = x^5 - 5x - 6$$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1 - 5 - 6 = -10 < 0 \\ f(2) &= 2^5 - 10 - 6 = 32 - 16 = +16 > 0 \end{aligned}\right\} \text{υπάρχει λύση}$$

$$x^5 - 5x - 6 = 0$$

$$x^5 = (5x + 6)$$

$$x = (5x + 6)^{1/5}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = (5x_0 + 6)^{1/5} = 1.61539$$

$$x_2 = (5x_1 + 6)^{1/5} = 1.69708$$

$$x_3 = 1.70796$$

$$x_4 = 1.70809$$

$$x_5 = 1.70811 = 1.708.$$