ΘΕΡΙΝΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΤΕΣΤ 2   12/7/2017

Άσκηση 1. (μ. 20)
Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων (οι εκφράσεις να απλοποιηθούν πλήρως).

$(i)\ f(x)=e^{-\ln^2 x} \qquad (ii)\ g(x)=\dfrac{2}{\cos\sqrt{x}} \qquad (iii)\ h(x)=\dfrac{x\sin(x)}{x+1}$

Άσκηση 2. (μ.25).
Να βρεθούν <u>τέσσερα από τα έξι</u> παρακάτω όρια

$(i)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \qquad (ii)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^4(2x)}{x\sin^3(x)} \qquad (iii)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1+x-e^x}$

$(iv)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^x \qquad (v)\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln x} \qquad (vi)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

Άσκηση 3. (μ.30)
Να βρεθεί το Π.Ο., η ορίζοντια (μόνο) ασύμπτωτη, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

Να εξηγήσετε αν η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο σημείο x=0.5.

Άσκηση 4. (μ.10)
Να δείξετε (χρησιμοποιώντας μονοτονία) ότι

$\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}, \quad \text{για } x>0$

Άσκηση 5. (μ.15)
Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a, b ώστε η ακόλουθη συνάρτηση έχει ακρότατο σημείο στο (1,1).

$f(x)=ae^{x-1}+bx^2$

ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΣΤ 2

1(i)

$$f'(x) = e^{-\ln^2 x}\left(-\ln^2 x\right)' = e^{-\ln^2 x}\left(-2\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{2}{x}\ln x\, e^{-\ln^2 x}$$

1(ii)

$$g'(x) = \left(2\cdot(\cos\sqrt{x})^{-1}\right)' = 2\cdot\left((\cos\sqrt{x})^{-1}\right)'$$

$$= 2\cdot(-1)\cdot(\cos\sqrt{x})^{-2}\cdot(\cos\sqrt{x})'$$

$$= -2\cdot(\cos\sqrt{x})^{-2}\cdot(-\sin\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'$$

$$= -2\,(\cos\sqrt{x})^{-2}\cdot(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= +\ \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}.$$

1(iii)

$$h'(x) = \left(\frac{x\cdot\sin(x)}{x+1}\right)' = \frac{(x\cdot\sin x)'\cdot(x+1) - x\cdot\sin x\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(1\cdot\sin x + x\cdot\cos x)\cdot(x+1) - x\cdot\sin x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\sin x\cdot(\cancel{x}+1) + x\cdot(x+1)\cdot\cos x - \cancel{x\sin x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\sin x + x\cdot(x+1)\cdot\cos x}{(x+1)^2}$$

2(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \frac{1}{2}$

2(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^4(2x)}{x\cdot \sin^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4(2x)}{\cos^4(2x)\cdot x\cdot \sin^3(x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^4(2x)} \cdot \frac{\sin^4(2x)}{(2x)^4} \cdot \frac{x^3}{\sin^3(x)} \cdot \frac{(2x)^4}{x^3 \cdot x}$

$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot 16 = 16.$

2(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x-e^x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1-e^x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{-e^x} = \frac{2}{-e^0} = -2.$

2(iv) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^x = 1^\infty$

$\ln\left[\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^x\right] = x\cdot \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

$\lim_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-3/2}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/2}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{x} = e^{\infty} = \infty.$$

$$2(v) \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = (0^+)^{\ln 0^+} = (0^+)^{-\infty} = \frac{1}{(0^+)^{\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Διαφορετικά, μπορούσαμε επίσης να πούμε :

$$\ln\left[x^{\ln x}\right] = \ln x \cdot \ln x = \ln^2 x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln^2 x = (\ln 0^+)^2 = (-\infty)^2 = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = e^{\infty} = \infty.$$

$$2(vi) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

3. $\Pi.O.f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Οριζόντια ασύμπτωτη :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \qquad \boxed{y = 0}$$

Ακρότατα :

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4}$$

$1 - 2\ln x = 0$

$2\ln x = 1$

$\ln x = \frac{1}{2}$

$x = e^{\frac{1}{2}}$

$$y = \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{(e^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

	0		$e^{\frac{1}{2}}$	
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	max $\frac{1}{2e}$	$\searrow$

Σημεία καμπής :

$$y'' = \left(\frac{1 - 2\ln x}{x^3}\right)' = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - (1 - 2\ln x) \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6} = \frac{x^2 \cdot (-5 + 6\ln x)}{x^6}$$

$-5 + 6 \cdot \ln x = 0$

$\ln x = \frac{5}{6}$

$x = e^{5/6}$, $y = \frac{\ln(e^{5/6})}{(e^{5/6})^2} = \frac{5/6}{e^{5/3}} = \frac{5}{6e^{5/3}}$

	0		$e^{5/6}$	
y''		$-$	0	$+$

σημείο καμπής

$\frac{5}{6e^{5/3}}$

Μονοτονία στο $x = 0.5$:

$x = 0.5 < e^{\frac{1}{2}}$. Από τον πίνακα της μονοτονίας στο σημείο αυτό έχουμε $y' > 0$ επομένως η y είναι αύξουσα.

4. Θέλουμε να ~~...~~ αποδείξουμε ότι

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}, \quad x > 0$$

Ισοδύναμα,

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0, \quad x > 0$$

Ορίζουμε,

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0,$$

για $x > 0$.

$\Rightarrow$ f αύξουσα στο $x > 0$.

$\Rightarrow$ Αν $x > 0$

τότε $f(x) > f(0)$

$$\Rightarrow \ln(x+1) - \frac{x}{1+x} > \ln(1) - \frac{0}{1}$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) - \frac{x}{1+x} > 0.$$

5.

(1,1) είναι σημείο της καμπύλης : $f(1) = 1 \Rightarrow$

$1 = a \cdot e^{1-1} + b \cdot 1^2$

$\boxed{1 = a + b}$

Ακρότατο στο $x = 1$: $f'(1) = 0$

$f'(x) = a \cdot e^{x-1} + b \cdot 2x$

$f'(1) = a e^{1-1} + b \cdot 2 \cdot 1$

$= \boxed{a + 2b = 0}$

$\rightarrow a = -2b$

$-2b + b = 1$

$-b = 1$

$b = -1$

$a = +2$.