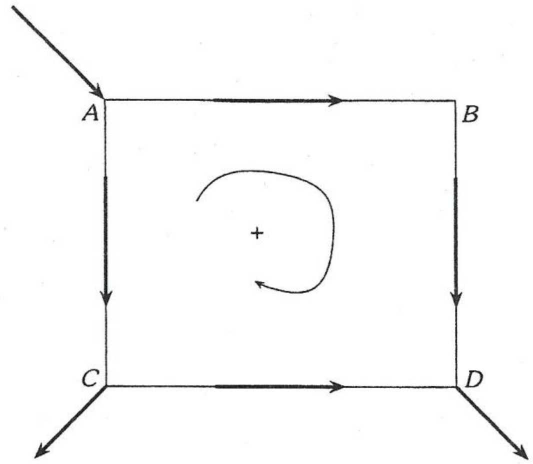
Ανάλυση κλειστών δικτύων

Η ανάλυση κλειστών δικτύων στηρίζεται στη διατήρηση της μάζας και της ενέργειας.



Σε ένα τυπικό βρόχο ABCDA υπάρχει ένας αριθμός από κόμβους, εδώ A,B,C,D, στους οποίους ισχύει η διατήρηση της μάζας:

Σε κάθε κόμβο:

$$\sum Q_{in} = \sum Q_{out}$$

Σε κάθε τέτοιο βρόχο συνολικά ισχύει η διατήρηση της ενέργειας:

$$h_{fA\rightarrow B} + h_{fB\rightarrow D} - h_{fC\rightarrow D} - h_{fA\rightarrow C} = 0$$

όπου τα πρόσημα αποδίδονται με βάση με **συμβατική θετική φορά** με την οποία διατρέχουμε τον κόμβο και τη **φορά της ροής** στους αντίστοιχους κλάδους. Σημείωση: το υδραυλικό ύψος μειώνεται στη φορά της ροής.

Ανάλυση κλειστών δικτύων

Σε ένα δίκτυο υπάρχουν γενικά Μ κόμβοι, Λ βρόχοι και Κ ψεύδο-βρόχοι (από δεξαμενή σε δεξαμενή). Η συνολική διατήρηση της μάζας, που είναι δεδομένη, είναι ισοδύναμη με το άθροισμα όλων των Μ εξισώσεων διατήρησης μάζας στους κόμβους, επομένως μόνο Μ-1 από αυτές τις εξισώσεις είναι ανεξάρτητες. Συνολικά υπάρχουν Μ+Λ+Κ-1 ανεξάρτητες εξισώσεις.

● Η διατήρηση της μάζας επιβάλει ότι ουσιαστικά μόνο **μία μεταβλητή παροχής είναι ανεξάρτητη σε κάθε βρόχο**. Επομένως έχουμε Λ+Κ μεταβλητές παροχής που βρίσκονται από τις Λ+Μ εξισώσεις διατηρήσης ενέργειας.

● Ακολουθώντας τη θετική φορά του βρόχου, όταν διατρέχουμε το κάθε ορισμένο κλάδο σε αυτόν σύμφωνα με φορά της ροής τότε η παροχή είναι θετική (Q>0) το υδραυλικό ύψος μειώνεται (δηλαδή έχουμε θετική απώλεια, hf>0), ενώ όταν τον διατρέχουμε αντίθετα από τη ροή τότε η παροχή είναι αρνητική (Q<0) το υδραυλικό ύψος αυξάνεται (δηλαδή έχουμε αρνητική απώλεια, hf<0) . Αυτά τα περιγράφουμε συμπαγώς με την έκφραση

$$h_f = RQ|Q|$$

Οπότε η διατήρηση της ενέργειας δίνεται απλά από τη σχέση

$$\sum h_f = 0 \Rightarrow \sum RQ|Q| = 0$$

διατρέχοντας κατά τη θετική φορά όλο το βρόχο.

Εξισώσεις ΔQ

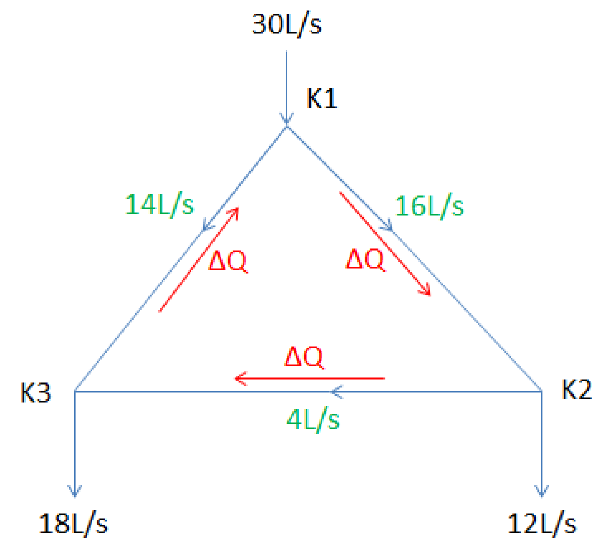
Το σετ των εξισώσεων

$$\sum RQ|Q| = 0$$

για όλους τους κόμβους και βρόχους είναι οι Q-εξισώσεις για τη λύση του κλειστού δικτύου. Το πρώτο σετ (των κόμβων) μπορεί να ληφθεί αυτόματα υπόψη (όπως θα δούμε) και μένει να λύσουμε το σετ των βρόχων (διατήρηση της ενέργειας). Υπάρχουν αντίστοιχες εξισώσεις όπου το πρόβλημα διατυπώνεται ως πρός τις απώλειες hf όπου το σετ των βρόχων λαμβάνεται αυτόματα υπόψη και οι μη τετριμμένες εξισώσεις είναι αυτές των κόμβων, δηλαδή η διατήρηση της μάζας. Αυτές είναι οι H-εξισώσεις. Εδώ θα περιοριστούμε στις Q-εξισώσεις.

Αναγωγή των παροχών ενός βρόχου σε μία ανεξάρτητη μεταβλητή παροχής

Ας πάρουμε ένα παράδειγμα ενός βρόχου με γνωστές παροχές εισροής (30L/s) και εκροής (12L/s, 18L/s). Μπορούμε να υποθέσουμε κάποιες τιμές για τις παροχές των κλάδων, 16L/s,4L/s, 14L/s, στους κλάδους 12,23,31, αντίστοιχα. Αν τώρα υποθέσουμε ότι στις παροχές αυτές υπερτίθεται μία παροχή ΔQ που διατρέχει το βρόχο **κατά μία ορισμένη φορά** (**κατά σύμβαση θετική**) τότε οι προκύπτουσες παροχές ικανοποιούν αυτόματα τη διατήρηση της μάζας.



Εξισώσεις ΔQ

Με αυτα τα δεδομένα έχουμε να λύσουμε μία εξίσωση διατήρησης ενέργειας στο βρόχο αυτό. Πρέπει να θυμόμαστε ότι γενικά η αντίσταση R του κάθε κλάδου είναι συνάρτηση της παροχής Q αυτού του κλάδου

$$R(Q) = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5}$$

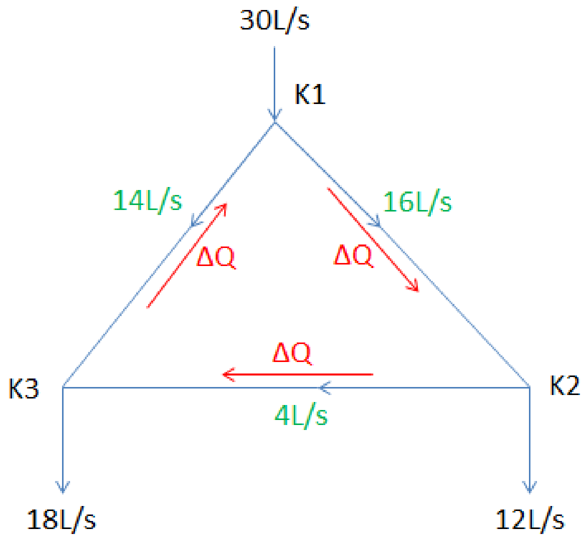
όπου ο συντελεστής τριβής f ο οποίος δίνεται – κατά τα γνωστά – από τον τύπο Swamee-Jain εξαρτάται από την παροχή του κλάδου διαμέσου του αριθμού Reynolds (Re):

$$f = \frac{0.25}{\log_{10}^2\left[\frac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}} + \frac{k}{3.7D}\right]}, \qquad \mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi\nu D}$$

Δηλαδή, οι παροχές των κλάδων (μαζί με τα πρόσημα τους) είναι

Q12=+16L/s+ΔQ, Q23=+4L/s+ΔQ, Q31=–14L/s+ΔQ

Το ΔQ είναι εξ ορισμού μικρότερο από όλες αυτές τις παροχές ώστε να μην αλλάζει το πρόσημο που έχουμε αποδώσει.



Εξισώσεις ΔQ

Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας γίνεται

$$\sum R(|Q|)Q|Q| = 0$$

που επίσης γράφεται και στη μορφή

$$\sum \mathrm{sign}(Q)R(|Q|)Q^2 = 0$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με iterations: Αν για **κάθε κλάδο** ονομάσουμε **Q0** την **αρχική (δοκιμαστική) παροχή του** και **hf0 την αντίστοιχη απώλεια ύψους στον κλάδο αυτό**, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\Delta Q_1 = -\frac{\sum h_{f0}}{2\sum \left| h_{f0}/Q_0 \right|}$$

Οπότε στο στάδιο αυτό η παροχή **κάθε κλάδου** είναι Q1=Q0+ΔQ1 **κρατώντας προσεχτικά τα πρόσημα**. Από τα Q1 υπολογίζουμε τα αντίστοιχα hf1. Από αυτά υπολογίζουμε την επόμενη διόρθωση

$$\Delta Q_2 = -\frac{\sum h_{f1}}{2\sum \left| h_{f1}/Q_1 \right|}$$

Οι διορθωμένες παροχές θα είναι τώρα Q2=Q1+ΔQ2.

Εξισώσεις ΔQ - Εφαρμογή

Συνεχίζοντας έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τις παροχές και τις απώλειες πιεζομετρικού ύψους. Σταματάμε όταν οι παροχές σε L/s σταθεροποιηθούν σε επίπεδο δεύτερου δεκαδικού, ή πιο πρόχειρα, όταν το ΔQ γίνει μικρότερο του 0.01 L/s (κατά απόλυτη τιμή).

Εφαρμογή Το πρόβλημα που ξεκινήσαμε μπορεί να λυθεί συγκεκριμένα να συμπληρώσουμε τα γεωμετρικά στοιχεία των αγωγών

Data		
κλάδος	L (m)	ονομαστικη D (mm)
12	200	160
23	300	110
31	150	140

και καθορίσουμε συντελεστή τραχύτητας και κινηματικό ιξώδες του νερού: $\nu=10^{-6}$ m^2/s και k=0.1mm. Η λύση υλοποιείται σε Excel (eswteriko_udragwgeio.xls). Τα αποτελέσματα είναι:

κλάδος	hf (m)	Q(L/s)
12	1.37	14.99
23	0.66	2.99
31	-2.03	-15.01

Δίνεται επίσης το ύψους της πιεζομετρικής γραμμής στον κόμβο 1 καθώς και τα υψόμετρα των τριών κόμβων.

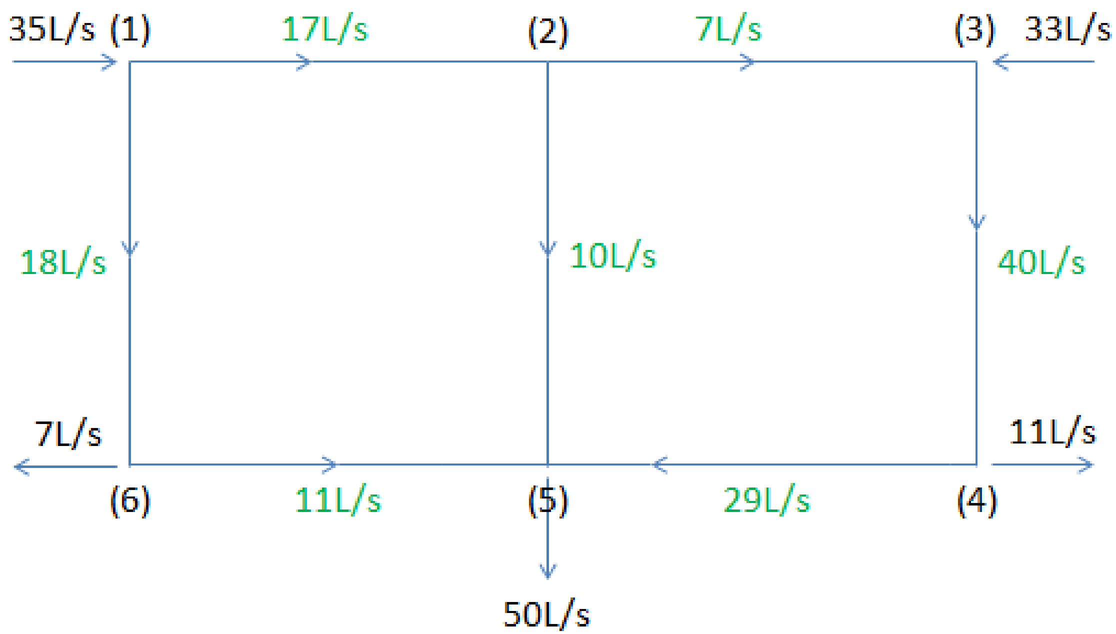
Data		
κόμβος	υψόμετρο z (m)	πιεζομετρικό ύψος
1	+49	+100
2	+51	
3	+48	

Ζητούνται τα πιεζομετρικά ύψη στους άλλους δύο κόμβους, και ο έλεγχος επάρκειας πίεσης στο δίκτυο αν ο οικισμός της περιοχής αυτής έχει ως διώροφα κτίρια.

κόμβος	υψόμετρο z (m)	πιεζομετρικό ύψος	hf (m)	ύψος πίεσης	κλάδος
1	49	100	1.37	100–49=51	12
2	51	100–1.37=98.63	0.66	98.63–51=47.63	23
3	48	98.53–0.66=97.97	-2.03	97.97–48=49.97	31

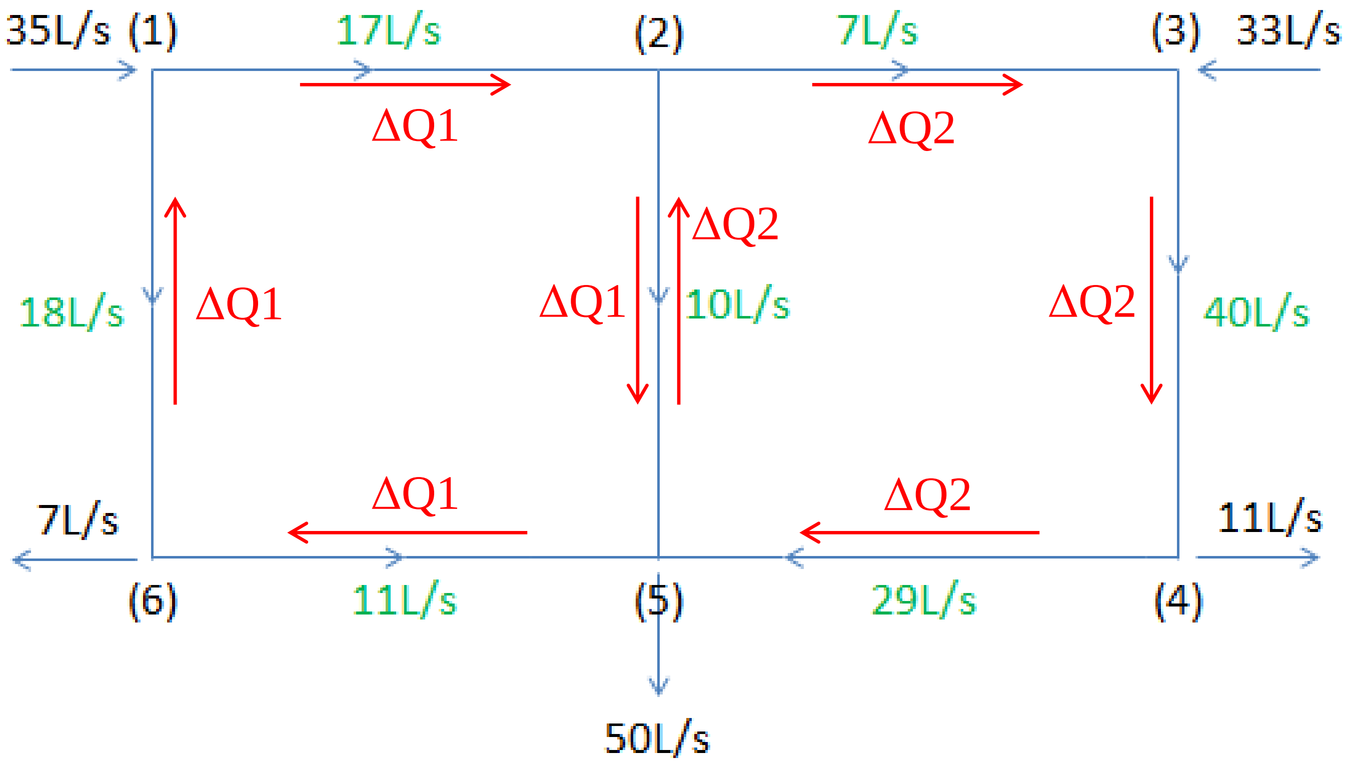
Παρατηρούμε ότι το ύψος πίεσης είναι απολύτως επαρκές για διώροφες οικοδομές (>16m).

<u>Εφαρμογή</u> Πρόβλημα δύο βρόχων. Η τραχύτητα των αγωγών και το ιξώδες του νερού είναι ίδια με την προηγούμενη εφαρμογή. Τα γεωμετρικά στοιχεία των αγωγών δίνονται στον πίνακα (οι διάμετροι είναι πραγματικές). Στο διάγραμμα δίνονται και οι πρώτες δοκιμαστικές παροχές των αγωγών.



Data					
κλάδος	**L (m)**	**D (m)**	**κλάδος**	**L (m)**	**D (m)**
12	100	0.141	23	300	0.141
25	120	0.1234	34	100	0.176
56	150	0.1234	45	100	0.176
61	100	0.141	52	120	0.1234

Το ζητούμενο είναι οι παροχές των κλάδων. Στις δοκιμαστικές παροχές των κλάδων υπερθέτουμε μια παροχή ΔQ για κάθε κλάδο, που τον διατρέχει κατά τη θετική του φορά (ουσιαστικά, την ορίζει).



Το δίκτυο λύνεται προσδιορίζοντας τις παροχές ΔQ1, ΔQ2. Έχουμε μια εξίσωση διατήρησης της ενέργειας για κάθε βρόχο, επομένως δύο εξισώσεις. Οι βρόχοι που πήραμε είναι οι 12561 και 23452. Μία άλλη ισοδύναμη επιλογή θα ήταν 12561 και 1234561, και επίσης 23452 και 1234561.

Οι εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας παίρνουν τη μορφή

$$R_{12}(|Q_{12}|)Q_{12}^2 + R_{25}(|Q_{25}|)Q_{25}^2 - R_{56}(|Q_{56}|)Q_{56}^2 - R_{61}(|Q_{61}|)Q_{61}^2 = 0$$

$$R_{23}(|Q_{23}|)Q_{23}^2 + R_{34}(|Q_{34}|)Q_{34}^2 + R_{45}(|Q_{45}|)Q_{45}^2 - R_{52}(|Q_{52}|)Q_{52}^2 = 0$$

όπου

Q12=+17L/s+ΔQ1
Q25=+10L/s+ΔQ1–ΔQ2
Q56=–11L/s+ΔQ1
Q61=–18L/s+ΔQ1

Q23=+7L/s+ΔQ2
Q34=+40L/s+ΔQ2
Q45=+29L/s+ΔQ2
Q52=–10L/s–ΔQ1+ΔQ2

Φυσικά Q52=–Q25.

Η λύση του προβλήματος υλοποιείται σε Excel (eswteriko_udragwgeio.xls) με τη χρήση Solver.

Το πρόβλημα επίσης μπορεί να λυθεί με iterations. Σε κάθε βήμα τα δύο ΔQ είναι η λύση του συστήματος που προκύπτει εφαρμόζοντας σε κάθε ένα από τους (δύο) βρόχους τον κανόνα

$$\sum h_f + 2\sum\left|\frac{h_f}{Q}\right|\Delta Q_{\text{αυτου του βροχου}} - 2\left|\frac{h_f}{Q}\right|_{\text{του κοινου κλαδου}}\Delta Q_{\text{του αλλου βροχου}} = 0$$

Αυτή η διαδικασία υλοποιείται σε Excel (eswteriko_udragwgeio.xls).

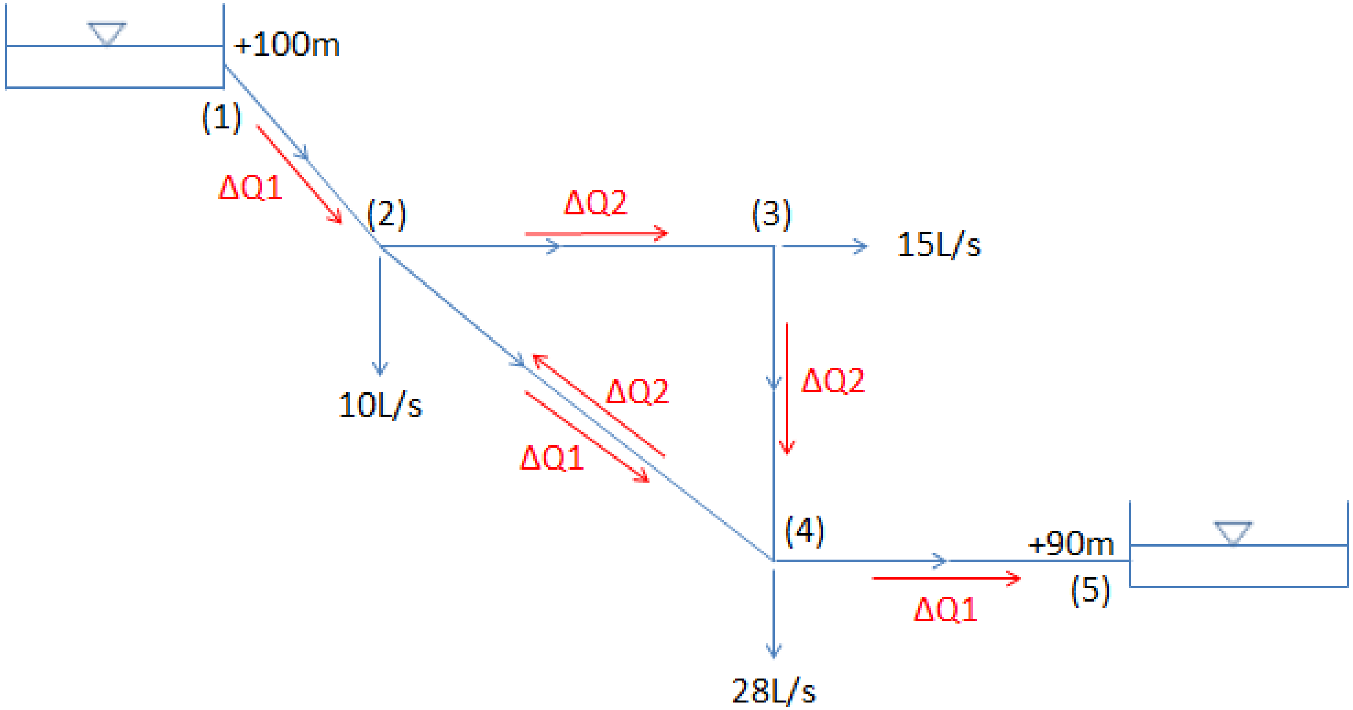
Με οποιοδήποτε τρόπο και να το λύσουμε βρίσκουμε την εξής απάντηση:

κλάδος	**hf (m)**	**Q (L/s)**	**κλάδος**	**hf (m)**	**Q (L/s)**
12	0.73	15.52	23	0.42	6.78
25	1.855	15.75	34	0.99	32.78
56	-1.44	-12.48	45	0.45	21.78
61	-1.14	-19.48	52	-1.855	-15.75

Εφαρμογή Να βρεθούν οι παροχές στους κλάδους του δικτύου για το παρακάτω πρόβλημα

ν (m2/s)	0.000001	z1 (m)	100
k (m)	0.0001	z5 (m)	90

κλαδος	L (m)	D (m)	κλαδος	L (m)	D (m)
12	400	0.1982	23	200	0.1586
24	200	0.1102	34	300	0.1102
45	300	0.141	42	200	0.1102



Δύο δεξαμενές δημιουργούν ένα ψευδο-βρόχο, επομένως έχουμε δύο βρόχους στο πρόβλημα αυτό. Αυτό σημαίνει δύο ανεξάρτητες παροχές ΔQ1 και ΔQ2 που διατρέχουν τους δύο βρόχους:

$$h_{f\,12} + h_{f\,24} + h_{f\,45} = z_1 - z_5 \qquad h_{f\,23} + h_{f\,34} + h_{f\,42} = 0$$

δηλαδή

$$R_{12}(|Q_{12}|)Q_{12}^2 + R_{24}(|Q_{24}|)Q_{24}^2 + R_{45}(|Q_{45}|)Q_{45}^2 = z_1 - z_5$$

$$R_{23}(|Q_{23}|)Q_{23}^2 + R_{34}(|Q_{34}|)Q_{34}^2 - R_{42}(|Q_{42}|)Q_{42}^2 = 0$$

Το προβλήμα αυτό λύνεται επίσης στο Excel (eswteriko_udragwgeio.xls) με τη χρήση Solver:

κλαδος	**hf (m)**	**Q (L/s)**	κλαδος	**hf (m)**	**Q (L/s)**
12	4.97	49.98	23	1.975	24.75
24	5.12	15.23	34	3.15	9.75
45	-0.0898	-3.02	42	-5.12	-15.23

Η διάλεξη αυτή είναι στηριγμένη στις ακόλουθες πηγές:

Υδραυλικά έργα, Γ. Τσακίρης (ed.), Σχεδιασμός & Διαχείρηση, Εκδόσεις Συμμετρία, 2010.

Hydraulics of pipeline systems, B. E. Larock, R. W. Jeppson, G. Z. Watters, CRC Press, 2000.