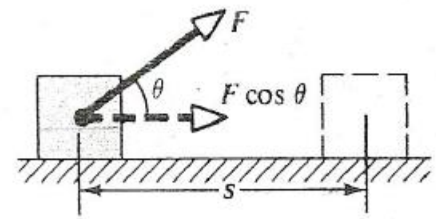
7 – Έργο – Ενέργεια

7.2 ΕΡΓΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Θεωρήστε ότι ένα σώμα μετατοπίζεται ευθύγραμμα κατά μήκος s υπό την δράση δύναμης $\boldsymbol{F}$, η οποία σχηματίζει γωνία θ με το s, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1 Εάν ένα σώμα μετατοπιστεί κατά απόσταση s, τότε το έργο που παρήγαγε η δύναμη $\boldsymbol{F}$ που τό μετατόπισε είναι $(F \cos \theta)s$.

Ορίζουμε ότι το έργο σταθερής δύναμης ισούται με το γινόμενο τής συνιστώσας τής δύναμης πάνω στη διεύθυνση τής μετατόπισης επί το μέτρο τής μετατόπισης.

Έργο σταθερής δύναμης

Επειδή η συνιστώσα τής $\boldsymbol{F}$ στη διεύθυνση s είναι $F \cos \theta$, το έργο W τής F είναι

$$W \equiv (F \cos \theta)s \tag{7.1}$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον ορισμό αυτό, η $\boldsymbol{F}$ παράγει έργο όταν πληρούνται οι ακόλουθοι όροι: (1) το σώμα πρέπει να μετατοπιστεί και (2) η δύναμη $\boldsymbol{F}$ πρέπει να έχει μη μηδενική συνιστώσα στη διεύθυνση τού $\boldsymbol{s}$. Από τον πρώτο όρο βλέπουμε ότι η δύναμη δεν παράγει έργο εάν το σώμα δεν κινηθεί ($s = 0$). Λογουχάρη, εάν κάποιος σπρώχνει έναν τοίχο, ασκεί δύναμη αλλά δεν παράγει έργο όσο ο τοίχος παραμένει ακίνητος. Βεβαίως, το άτομο αυτό καταναλώνει εσωτερική ενέργεια, διότι οι μύες του συστέλλονται (δηλαδή μετατοπίζονται). Έτσι, βλέπουμε ότι η σημασία τής λέξης *έργο* στη Φυσική είναι σαφώς διαφορετική από τη σημασία που έχει η λέξη αυτή κατά τη χρήση της στην καθημερινή ζωή. Επίσης, εάν κρατάτε ένα βάρος με το τεντωμένο χέρι σας, δεν παράγετε έργο πάνω στο βάρος (υποθέτουμε ότι το χέρι σας δεν κινείται ούτε τρέμει). Εσείς πρέπει να ασκείτε μία δύναμη προς τα επάνω, για να κρατάτε το βάρος, αλλά το έργο που παράγει η δύναμη είναι μηδενικό, γιατί η μετατόπιση είναι μηδενική.

Το έργο είναι μονόμετρη ποσότητα και οι μονάδες του είναι δύναμη πολλαπλασιασμένη επί το μήκος. Έτσι στο Διεθνές Σύστημα (SI) η μονάδα τού έργου είναι το **newton · meter** (N · m), που ονομάζεται **joule** (J). Η μονάδα τού έργου στο σύστημα c.g.s. είναι **dyne · cm**, που ονομάζεται **erg**, και στο βρετανικό σύστημα το lb·ft. Οι μονάδες αυτές αναγράφονται και στον Πίνακα 7.1. Σημειώστε ότι 1 J = 10^7 ergs.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1 Μονάδες έργου στα τρία συνήθη συστήματα

σύστημα	**μονάδα έργου**	**ονομασία μονάδας**
SI	newton · meter (N · m)	joule (J)
cgs	dyne · centimeter (dyne · cm)	erg
Βρετανικό μηχανολογικό σύστημα	foot-pound (ft-lb)	foot · pound (ft · lb)

7.3 ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ (Ή ΜΟΝΟΜΕΤΡΟ Ή ΒΑΘΜΩΤΟ) ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έτσι όπως τό ορίσαμε, το έργο είναι ποσότητα *μονόμετρη* και ισούται με το γινόμενο τού μέτρου τής μετατόπισης επί την συνιστώσα τής δύναμης πάνω στη διεύθυνση τής μετατόπισης. Για διευκόλυνσή μας γράφουμε την Εξίσωση 7.1 χρησιμοποιώντας το εσωτερικό ή βαθμωτό ή *μονόμετρο* γινόμενο τών δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{s}$. Συμβολίζουμε αυτό το μονόμετρο γινόμενο ως $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$. Στα αγγλικά, συχνά, τό αποκαλούμε και *dot product* (από την τελεία = dot που βάζουμε ανάμεσα στα δύο διανύσματα τού γινομένου). Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 7.1 ως

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = F\, s \cos \theta \qquad (7.4)$$

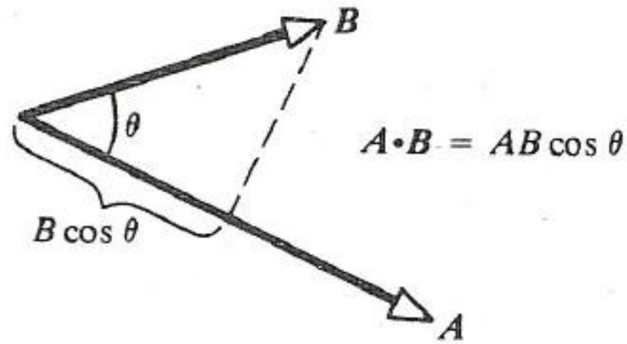
Με άλλα λόγια, $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$ (τό διαβάζετε «$\boldsymbol{F}$ ντοτ $\boldsymbol{s}$») είναι η συνθηματική γραφή που θα χρησιμοποιούμε αντί τού $F\ s\ \cos\ \theta$.

> **Γενικά, το μονόμετρο (ή βαθμωτό ή εσωτερικό ή ντοτ) γινόμενο δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ ορίζεται ως το μονόμετρο μέγεθος που ισούται με το γινόμενο τών μέτρων τών δύο διανυσμάτων επί το συνημίτονο τής γωνίας θ, η οποία περιέχεται από τις κατευθύνσεις τών διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$.**

Δηλαδή, το βαθμωτό γινόμενο τών διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB \cos \theta \tag{7.5}$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ τών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, όπως δείχνει το Σχήμα 7.3, A είναι το μέτρο τού $\boldsymbol{A}$ και B το μέτρο τού $\boldsymbol{B}$. Να σημειωθεί ότι τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ δεν είναι αναγκαίο να έχουν τις ίδιες μονάδες.



Σχήμα 7.3 Το εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ τών δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ καὶ $\boldsymbol{B}$ ισούται με το γινόμενο τού μέτρου τού $\boldsymbol{A}$ επί την προβολή τού $\boldsymbol{B}$ πάνω στο $\boldsymbol{A}$.

Στο Σχήμα 7.3, η προβολή τού $\boldsymbol{B}$ πάνω στην διεύθυνση τού $\boldsymbol{A}$ είναι $B \cos \theta$. Επομένως ο ορισμός τού $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, όπως τόν δώσαμε από την Εξίσωση 7.5, είναι ισοδύναμος με το γινόμενο τού μέτρου τού $\boldsymbol{A}$ επί την προβολή τού $\boldsymbol{B}$ πάνω στο $\boldsymbol{A}$ ή, ισοδύναμα πάλι, λέμε ότι $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ισούται με το γινόμενο τού μέτρου τού $\boldsymbol{B}$ επί την προβολή τού $\boldsymbol{A}$ πάνω στο $\boldsymbol{B}$.[1] Από την Εξίσωση 7.5 βλέπουμε ότι το βαθμωτό γινόμενο είναι αντιμεταθετικό. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{7.6}$$

Τέλος, το εσωτερικό γινόμενο υπακούει στον επιμεριστικό νόμο τού πολλαπλασιασμού. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{7.7}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα **i**, **j**, και **k**, τα οποία ορίσαμε στο Κεφάλαιο 2, κατευθύνονται προς τα θετικά x, y, και z, αντίστοιχα, ενός δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων. Επομένως, εάν εφαρμόσουμε τον ορισμό τού **A** · **B**, το μονόμετρο γινόμενο αυτών τών διανυσμάτων είναι

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \qquad (7.8a)$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \qquad (7.8b)$$

Μπορούμε να γράψουμε τα διανύσματα **A** και **B** συναρτήσει τών συνιστωσών τους

$$\mathrm{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τις Εξισώσεις 7.8a και 7.8b, το βαθμωτό γινόμενο τών **A** και **B** είναι

$$\mathrm{A} \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (7.9)$$

Στην ειδική περίπτωση που **A** = **B**, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2 = \mathrm{A}^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.2 Το μονόμετρο γινόμενο

Δίνονται τα διανύσματα $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ και $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$. (a) Προσδιορίστε το μονόμετρο γινόμενο $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (2i + 3j) \cdot (-i + 2j) \\ &= -2i \cdot i + 2i \cdot 2j - 3j \cdot i + 3j \cdot 2j \\ &= -2 + 6 = \ 4 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0$. Μπορούμε να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας κατευθείαν την Εξίσωση 7.9 με $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$, και $B_y = 2$.

(b) Βρείτε την γωνία θ που περιέχεται από τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Τα μέτρα τών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι:

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$
$$B = \sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 7.5 και τα αποτελέσματα από την (a) και έχουμε

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8.06} = 60.3°$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.3 Έργο σταθερής δύναμης

Ένα σώμα που κινείται στο επίπεδο xy μετατοπίζε σε απόσταση $\boldsymbol{s} = (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ m υπό την επίδραση σταθε δύναμης $\boldsymbol{F} = (5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$ N. (a) Υπολογίστε το μέτρο μετατόπισης και τής δύναμης.

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \ \sqrt{13}\ \text{m}$$

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = \ \sqrt{29}\ \text{N}$$

(b) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμι Θέτουμε τις εκφράσεις για το $\boldsymbol{F}$ και το $\boldsymbol{s}$ ς Εξίσωση 7.4, χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 7.8 έχουμε

$$\begin{aligned} W = F \cdot s &= (5i + 2j) \cdot (2i + 3j)\ \text{N} \cdot \text{m} \\ &= 5i \cdot 2i + 2j \cdot 3j = 16\ \text{N} \cdot \text{m} = \ 16 \end{aligned}$$

Άσκηση 2 Υπολογίστε τη γωνία ανάμεσα στην $\boldsymbol{F}$ την $\boldsymbol{s}$.
Απάντηση 34.5°.

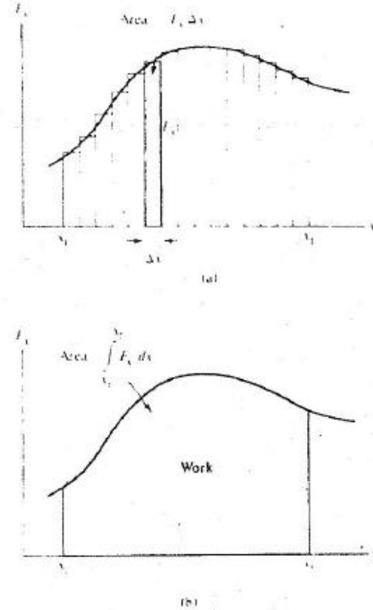
7.4 ΕΡΓΟ ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Θεωρήστε ένα σώμα που μετακινείται πάνω στον άξονα τών x υπό την επίδραση μεταβλητής δύναμης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4. Το σώμα μετατοπίστηκε πάνω στον άξονα τών x από το σημείο x_i στο σημείο x_f. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό $W = (F \cos\theta)\, s$ για να υπολογίσουμε το έργο το οποίο παράγει η δύναμη, διότι ο προηγούμενος ορισμός προϋποθέτει ότι η $\boldsymbol{F}$ είναι σταθερή σε μέτρο και διεύθυνση. Ας φανταστούμε όμως ότι το σώμα μετακινείται πάρα πολύ λίγο κατά Δx, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4a, η συνιστώσα x τής δύναμης $\boldsymbol{F}$ δεν έχει μεταβληθεί σημαντικά σε αυτό το πολύ μικρό διάστημα Δx και μπορούμε να πούμε κατά προσέγγιση ότι είναι σταθερή. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο που παράγει η δύναμη για να μετατοπίσει το σώμα κατά Δx

$$\Delta W = F_x\, \Delta x \tag{7.10}$$

Αλλά αυτό ισούται με την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια τού Σχήματος 7.4a. Εάν φανταστούμε ότι η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη τής F_x ως προς x χωρίζεται σε έναν μεγάλο αριθμό πολύ μικρών διαστημάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4a, τότε το συνολικό έργο που καταναλώνεται για να μετατοπιστεί το σώμα από το x_i στο x_f ισούται με το άθροισμα πολλών όρων, παρόμοιων με τον όρο τής Εξίσωσης 7.10:

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F_x\, \Delta x$$



Σχήμα 7.4 (a) Το έργο που παράγει η δύναμη $\boldsymbol{F_x}$ μετατοπίζοντας το σώμα κατά Δx είναι $F_x \Delta x$ και ισούται με την επιφάνεια τού γραμμοσκιασμένου ορθογωνίου. Το ολικό έργο που παράγεται για να μετατοπιστεί το σώμα από το x_i στο x_f είναι, προσεγγιστικά, ίσο με το άθροισμα τών επιφανειών όλων τών μικρών ορθογωνίων. (b) Το έργο που παράγει η μεταβαλλόμενη δύναμη $\boldsymbol{F_x}$ καθώς το σώμα κινείται υπό την επίδρασή της από το x_i στο x_f ισούται *ακριβώς* με την επιφάνεια που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη.

Εάν οι μετατοπίσεις Δx_i γίνουν απειροστά μικρές, τότε ο αριθμός τών όρων αυξάνεται απεριόριστα, αλλά η τιμή τού αθροίσματος τείνει προς μία ορισμένη τιμή, η οποία ισούται με την *επιφάνεια* που περιορίζεται από την καμπύλη F_x και τον άξονα τών x. Όπως γνωρίζουμε από το μάθημα τού απειροστικού λογισμού, το όριο αυτό τού αθροίσματος ονομάζεται **ολοκλήρωμα** και το συμβολίζουμε με

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \, \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

Τα όρια $x = x_i$ και $x = x_f$ καθορίζουν τα όρια τών τιμών τις οποίες μπορεί να λάβει η ανεξάρτητη μεταβλητή x και, γι' αυτό, το ολοκλήρωμά μας λέγεται **ορισμένο ολοκλήρωμα.** (Ενώ, όπως ξέρετε, *αόριστο ολοκλήρωμα* είναι το όριο τού αθροίσματος πάνω σε ένα ακαθόριστο διάστημα. Βλ. στο Παράρτημα Β.7 μια σύντομη ανασκόπηση τού ολοκληρωτικού λογισμού). Αυτό λοιπόν το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ίσο αριθμητικά με την επιφάνεια που περιέχεται κάτω από την καμπύλη τής F_x ως προς x, για τιμές τού x ανάμεσα στο x_i και στο x_f. Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε το έργο που παράγει η F_x για να μετατοπίσει το σώμα ανάμεσα στο x_i και x_f ως

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \tag{7.11}$$

Στην περίπτωση που η $F_x - F \cos \theta$ είναι σταθερή, η παραπάνω εξίσωση ανάγεται στην Εξίσωση 7.1, όπως, άλλωστε, ήταν επόμενο.

Έργο που παράγεται από ένα ελατήριο

Στο Σχήμα 7.6 φαίνεται ένα σύνηθες σύστημα στο οποίο η δύναμη είναι συνάρτηση τής μετατόπισης. Ένα σώμα που ακουμπάει πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια συνδέεται με τον τοίχο με ένα ελατήριο. Εάν το ελατήριο εκταθεί ή συμπιεσθεί από τη θέση ισορροπίας του, τότε το ελατήριο ασκεί δύναμη πάνω στο σώμα, η οποία ισούται με

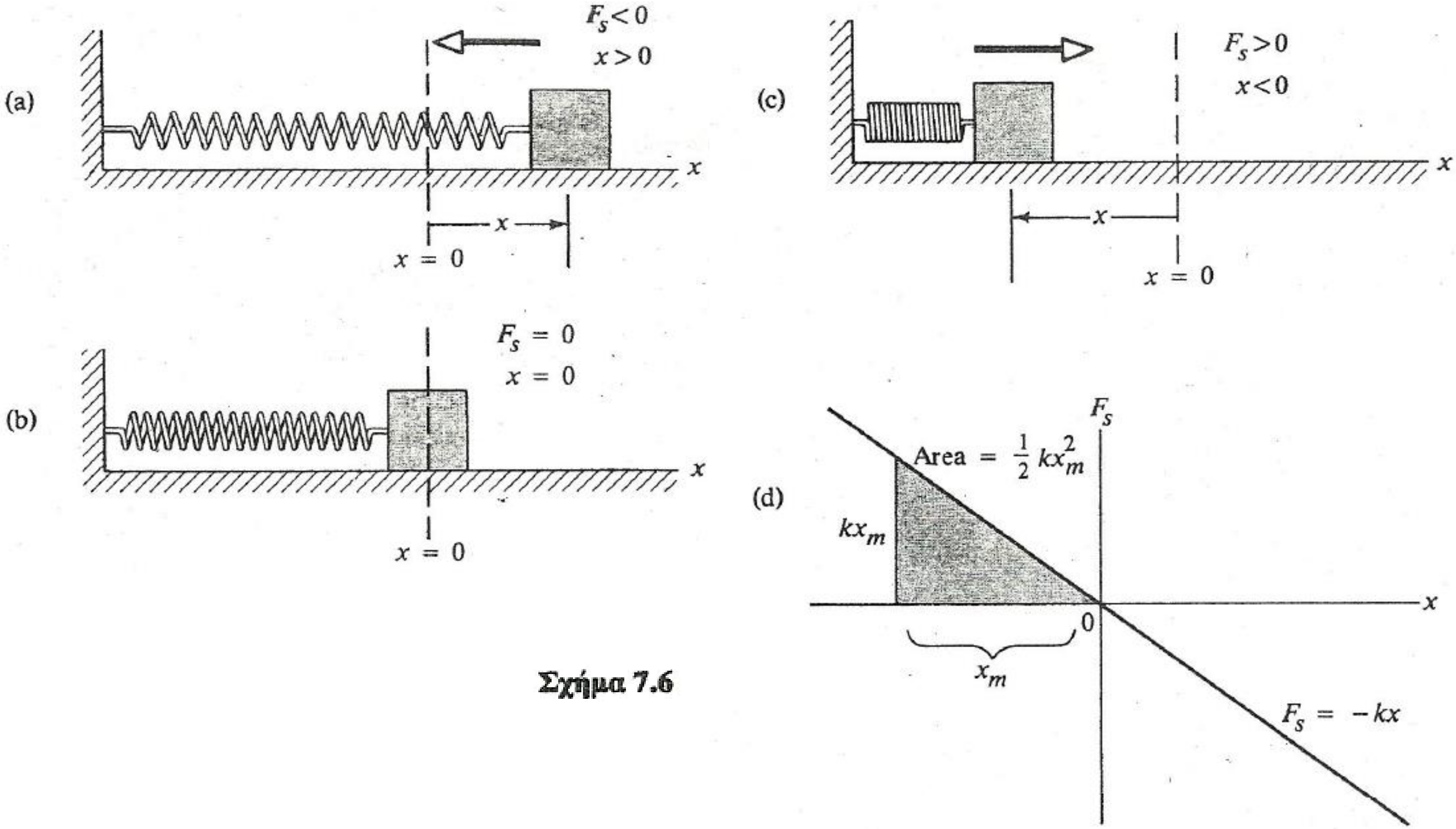
$$F_s = -kx \tag{7.13}$$

όπου x είναι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) και k είναι μια θετική σταθερά που λέγεται *ελαστική σταθερά* τού ελατηρίου. Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 5, ο νόμος αυτός ονομάζεται **νόμος τού Hooke.** Ας σημειωθεί ότι ο νόμος τού Hooke ισχύει γενικά για μικρές μόνο μετατοπίσεις. Η τιμή τού k είναι ενδεικτική τής σκληρότητας τού ελατηρίου. Σκληρά ελατήρια έχουν μεγάλες τιμές τού k, ενώ μαλακά ελατήρια έχουν μικρές τιμές τού k.

Ας υποθέσουμε ότι σπρώχνουμε το σώμα προς τα αριστερά μέχρι απόσταση x_m από τη θέση ισορροπίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.6c, και τό αφήνουμε. Ας υπολογίσουμε *το έργο που παράγεται από τη δύναμη τού ελατηρίου* καθώς το σώμα κινείται από το σημείο $x_i = -x_m$ στο $x_f = 0$. Εάν εφαρμόσουμε την Εξίσωση 7.11, παίρνουμε

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s\,dx = \int_{-x_m}^{0} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \tag{7.14a}$$

Δηλαδή το έργο που παράγεται από τη δύναμη τού ελατηρίου είναι θετικό, επειδή η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση (και οι δύο κατευθύνονται προς τα δεξιά). Εάν υπολογίσουμε το έργο που παράγει η δύναμη τού ελατηρίου καθώς το σώμα κινείται από το $x_i = 0$ στο $x_f = x_m$, βρίσκουμε ότι $W_s = -\frac{1}{2}kx_m^2$. Επομένως το *συνολικό* έργο που παράγει η δύναμη τού ελατηρίου καθώς το σώμα κινείται από το $x_i = -x_m$ στο $x_f = x_m$ είναι *μηδενικό*.



Σχήμα 7.6

7.5 ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Στο Κεφάλαιο 5 είδαμε ότι όταν η συνισταμένη τών δυνάμεων οι οποίες δρουν επί ενός σώματος δεν είναι μηδενική, τότε το σώμα επιταχύνεται. Θεωρήστε την περίπτωση κατά την οποία μια σταθερή δύναμη $\boldsymbol{F}_x$ δρα πάνω σε ένα σώμα μάζας $\boldsymbol{m}$ το οποίο κινείται στη διεύθυνση x. Ο δεύτερος νόμος τού Newton λέει ότι $\boldsymbol{F}_x = \mathrm{m}\boldsymbol{a}_x$, όπου η $\boldsymbol{a}_x$ είναι σταθερή, αφού η $\boldsymbol{F}_x$ είναι σταθερή. Εάν το σώμα μετατοπιστεί από το $x_i = 0$ στο $x_f = \mathrm{s}$, τότε το έργο που παράγει η δύναμη $\boldsymbol{F}_x$ είναι

$$W = F_x s = (ma_x)s \tag{7.15}$$

Στο Κεφάλαιο 3 όμως είδαμε ότι, όταν το σώμα επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$s = \tfrac{1}{2}(v_i + v_f)t \qquad a_x = \frac{v_f - v_i}{t}$$

όπου v_i είναι η ταχύτητα τη στιγμή $t = 0$ και v_f είναι η ταχύτητα τη στιγμή t. Θέτουμε τις εκφράσεις αυτές στην Εξίσωση 7.15 και έχουμε

$$W = m\left(\frac{v_f - v_i}{t}\right)\tfrac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

$$W = \tfrac{1}{2}mv_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}mv_i^{\,2} \tag{7.16}$$

Ορίζουμε ότι η *κινητική ενέργεια* ενός σώματος είναι ίση με το γινόμενο τού μισού τής μάζας επί το τετράγωνο τού μέτρου ταχύτητας τού σώματος.

Δηλαδή, η κινητική ενέργεια, K, ενός σώματος μάζας m το οποίο έχει μέτρο ταχύτητας v ορίζεται με την παρακάτω εξίσωση

$$K \equiv \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{7.17}$$

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει τις ίδιες μονάδες με το έργο. Λογουχάρη, μία μάζα 1 kg η οποία κινείται με ταχύτητα 4.0 m/s έχει κινητική ενέργεια 8.0 J. Στον Πίνακα 7.2 περιέχεται κατάλογος τών κινητικών ενεργειών διαφόρων σωμάτων. Μπορούμε να νοήσουμε την κινητική ενέργεια ως ενέργεια που συνδέεται με την κίνηση ενός σώματος. Για διευκόλυνσή μας, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση 7.16 ως

$$W = K_f - K_i = \Delta K \tag{7.18}$$

Δηλαδή

> **Το έργο που παράγει η συνισταμένη σταθερή δύναμη F καθώς μετατοπίζεται ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας τού σώματος.**

Η λέξη μεταβολή εδώ σημαίνει τη διαφορά τής τελικής μείον την αρχική κινητική ενέργεια.

Η Εξίσωση 7.18 αποτελεί πολύ σημαντικό αποτέλεσμα και είναι γνωστή ως **θεώρημα έργου-ενέργειας.** Έχουμε εξαγάγει το θεώρημα αυτό για την περίπτωση σταθερής δύναμης, αλλά μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει ακόμη και όταν η δύναμη μεταβάλλεται. Εάν η συνολική δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα στη διεύθυνση x είναι $\Sigma \boldsymbol{F}_x$, τότε ξέρουμε από τον δεύτερο νόμο τού Newton ότι $\Sigma \boldsymbol{F}_x = m\boldsymbol{a}$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 7.12 για να υπολογίσουμε το συνολικό παραγόμενο έργο W_{net}:

$$W_{\text{net}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x\right) dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\, dx$$

Εφόσον η συνολική δύναμη εξαρτάται από το x, έπεται ότι και η ταχύτητα και η επιτάχυνση εξαρτώνται από το x. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα τής διαδοχικής διαφόρισης για να υπολογίσουμε το W_{net}:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Θέτουμε αυτό στην έκφραση για το W και παίρνουμε

$$W_{\text{net}} = \int_{x_i}^{x_f} mv\frac{dv}{dx}\, dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad (7.19)$$

Το θεώρημα έργου-ενέργειας, όπως εκφράζεται στην Εξίσωση 7.18, ισχύει επίσης και για τη γενικότερη περίπτωση κατά την οποία μεταβάλλεται η κατεύθυνση και το μέτρο τής δύναμης καθώς το σώμα κινείται πάνω σε μια οποιαδήποτε τροχιά στις τρεις διαστάσεις. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε

$$W = \int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{7.20}$$

όπου τα όρια i και f αντιστοιχούν στις αρχικές και στις τελικές συντεταγμένες τού σώματος. Το ολοκλήρωμα τής Εξίσωσης 7.20 ονομάζεται *γραμμικό ολοκλήρωμα*. Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα το οποίο περιγράφει μια απειροστά μικρή μετατόπιση ως $d\boldsymbol{s} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$, αλλά η $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$. Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 7.20

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F_x\, dx + \int_{y_\mathrm{i}}^{y_\mathrm{f}} F_y\, dy + \int_{z_\mathrm{i}}^{z_\mathrm{f}} F_z\, dz \tag{7.21}$$

Αυτή είναι γενική έκφραση[(2)] και τή χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το έργο που παράγει μια δύναμη όταν μετατοπίζει το σώμα από το σημείο το οποίο έχει συντεταγμένες $(x_\mathrm{i}, y_\mathrm{i}, z_\mathrm{i})$ στο σημείο $(x_\mathrm{f}, y_\mathrm{f}, z_\mathrm{f})$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι

το έργο που παράγει σε ένα σώμα η συνισταμένη τών δυνάμεων οι οποίες δρουν επάνω του ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας τού σώματος.

7.6 ΙΣΧΥΣ

Στην πράξη μάς ενδιαφέρει να ξέρουμε όχι μόνο το έργο που παράγεται πάνω σε ένα σώμα αλλά και τον ρυθμό με τον οποίο παράγεται το έργο αυτό. Ορίζουμε ότι *ο ρυθμός τής μεταφοράς ενέργειας* λέγεται **ισχύς**.

Εάν μια εξωτερική δύναμη δράσει πάνω σε ένα σώμα και παραγάγει έργο ΔW μέσα σε ένα χρονικό διάστημα Δt, τότε η **μέση ισχύς** για το χρονικό αυτό διάστημα είναι ίση με τον λόγο τού έργου προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\overline{P} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{7.22}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας, το έργο που παράγεται πάνω σε ένα σώμα αυξάνεται συναρτήσει τής ενέργειας τού σώματος. Λέμε λοιπόν ότι ισχύς είναι ο ως προς τον χρόνο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας. Η **στιγμιαία ισχύς** P είναι το όριο τής μέσης ισχύος καθώς το Δt τείνει προς το μηδέν:

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \tag{7.23}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 7.4, εκφράζουμε το έργο που παράγει μία δύναμη $\boldsymbol{F}$ καθώς μετατοπίζει ένα σώμα κατά $d\boldsymbol{s}$, $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$. Η στιγμιαία ισχύς ισούται λοιπόν με

$$P = \frac{dW}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \tag{7.24}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{s} / dt$.

Η μονάδα ισχύος στο SI είναι το J/s και ονομάζεται *watt* (προς τιμήν τού James Watt), συμβολίζεται δε με W:

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^3}$$

Δεν πρέπει να συγχέουμε το σύμβολο τού watt (βατ), W, με το σύμβολο τού έργου.

Στο βρετανικό σύστημα μονάδα ισχύος είναι ο ίππος (hp).

$$1\ \mathrm{hp} = 550\ \mathrm{ft \cdot lb/s} = 746\ \mathrm{W}$$

Μπορούμε να ορίσουμε μια νέα μονάδα ενέργειας (ή έργου) εάν χρησιμοποιήσουμε τη μονάδα ισχύος. Μία κιλοβατώρα (kilowatt-hour· σύμβ. kWh) είναι η ενέργεια που μετατράπηκε ή καταναλώθηκε μέσα σε μία ώρα με τον σταθερό ρυθμό ενός kW. Η αριθμητική τιμή μιας kWh είναι

$$1\ \mathrm{kWh} = (10^3\ \mathrm{W})(3600\ \mathrm{s}) = 3.6 \times 10^6\ \mathrm{J}$$

Πρέπει να θυμούμαστε ότι η kWh είναι μονάδα ενέργειας και όχι ισχύος.