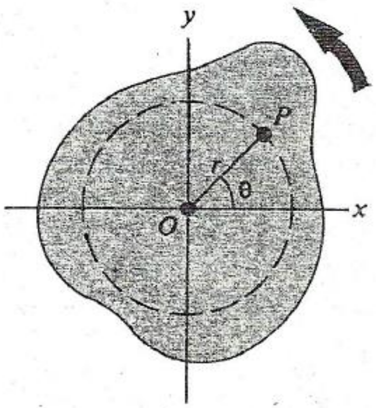
10 – Περιστροφή ενός στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα

10.1 ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στο Σχήμα 10.1 φαίνεται ένα επίπεδο στερεό σώμα, ακανόνιστου σχήματος, το οποίο είναι περιορισμένο στο επίπεδο xy και στρέφεται γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο τού σχήματος. Ένα από τα σωμάτια που αποτελούν το στερεό σώμα βρίσκεται στο σημείο P, το οποίο έχει σταθερή απόσταση r από την αρχή τών συντεταγμένων. Το σωμάτιο αυτό στρέφεται γύρω από το O διαγράφοντας κύκλο ακτίνας r. Για την ακρίβεια, *κάθε* σωμάτιο τού στερεού σώματος διαγράφει κύκλο με κέντρο το O. Για διευκόλυνσή μας, περιγράφουμε το σημείο P χρησιμοποιώντας τις πολικές συντεταγμένες (r, θ). Σε αυτή την περιγραφή η επιβατική ακτίνα r παραμένει σταθερή και η μόνη συντεταγμένη που μεταβάλλεται είναι η γωνία θ. Οι ορθογώνιες συντεταγμένες x, y μεταβάλλονται και οι δύο συναρτήσει τού χρόνου. Καθώς το σωμάτιο διατρέχει τον κύκλο από τον θετικό άξονα x ($\theta = 0$) στο σημείο P, διαγράφει τόξο κύκλου s, το οποίο σχετίζεται με τη γωνιακή θέση θ μέσω τής σχέσης

$$s = r\theta \tag{10.1a}$$

$$\theta = s/r \tag{10.1b}$$



Σχήμα 10.1 Περιστροφή ενός στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα (τον άξονα z) που είναι κάθετος στο επίπεδο τού σχήματος και διέρχεται από το O. Να σημειωθεί ότι ένα τυχαίο σημείο P διαγράφει κυκλική τροχιά, ακτίνας r, γύρω από το κέντρο O.

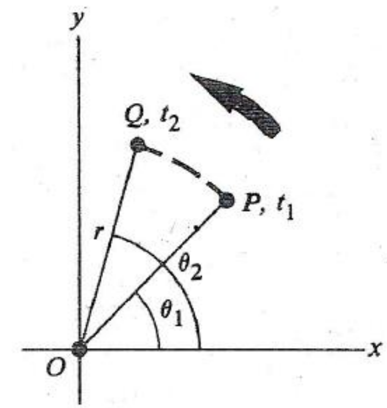
Καθώς το σώμα κινείται στο χρονικό διάστημα Δt από το σημείο P στο σημείο Q, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.2, η επιβατική ακτίνα σαρώνει γωνία $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, η οποία είναι ίση με τη **γωνιακή μετατόπιση**. Ορίζουμε ότι η **μέση γωνιακή ταχύτητα** $\bar{\omega}$ είναι ίση με τον λόγο τής γωνιακής μετατόπισης προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt:

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{10.2}$$

Κατ' αναλογίαν προς τη γραμμική ταχύτητα, η **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα**, ω, ορίζεται ότι είναι το όριο τής Εξίσωσης 10.2 καθώς το Δt τείνει προς το μηδέν:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{10.3}$$

Η γωνιακή ταχύτητα έχει μονάδες rad/s ή s^{-1}, αφού το ακτίνιο δεν έχει διάσταση. Ας επιλέξουμε εξ ορισμού το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε ο άξονας z να συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής τού στερεού σώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.1. Θα θεωρούμε την ω θετική όταν η θ αυξάνεται (περιστροφή αντίθετη με τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού) και αρνητική όταν η θ μειώνεται (περιστροφή όμοια με τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού).



Σχήμα 10.2 Κάθε σωμάτιο που βρίσκεται πάνω σε ένα περιστρεφόμενο στερεό σώμα κινείται από ένα σημείο P σε κάποιο άλλο σημείο Q διαγράφοντας τόξο κύκλου. Κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$, η αντίστοιχη επιβατική ακτίνα σαρώνει τόξο γωνίας $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Εάν η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος μεταβληθεί από το ω_1 στο ω_2 κατά το χρονικό διάστημα Δt, τότε το σώμα έχει γωνιακή επιτάχυνση. **Η μέση γωνιακή επιτάχυνση** $\overline{\alpha}$ ενός περιστρεφόμενου σώματος ορίζεται ως λόγος τής μεταβολής τής γωνιακής ταχύτητας προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt:

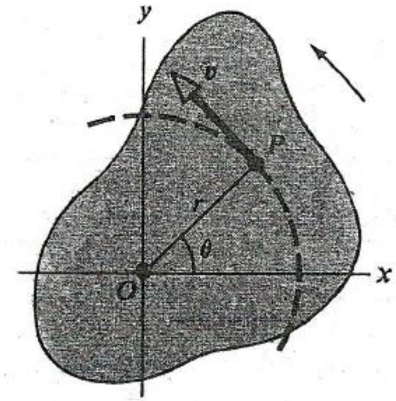
$$\overline{\alpha} \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{10.4}$$

Κατ' αναλογίαν προς την γραμμική επιτάχυνση ορίζουμε **τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση** ως όριο τού λόγου $\Delta\omega/\Delta t$ καθώς το Δt τείνει προς το μηδέν:

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{10.5}$$

10.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΓΩΝΙΑΚΕΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα εξαγάγουμε χρήσιμες σχέσεις ανάμεσα στη γωνιακή ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός περιστρεφόμενου στερεού σώματος, αφ' ενός, και στη γραμμική ταχύτητα και επιτάχυνση ενός τυχαίου σημείου τού σώματος, αφ' ετέρου. Θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν το γεγονός ότι, καθώς το στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα, *κάθε* μέρος τού σώματος αυτού διαγράφει ένα τόξο κύκλου γύρω από τον άξονα περιστροφής (βλ. Σχήμα 10.4).



Σχήμα 10.4 Καθώς ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό άξονα που διέρχεται από το O, το σημείο P έχει γραμμική ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ που εφάπτεται στην κυκλική τροχιά ακτίνας r την οποία διαγράφει το P.

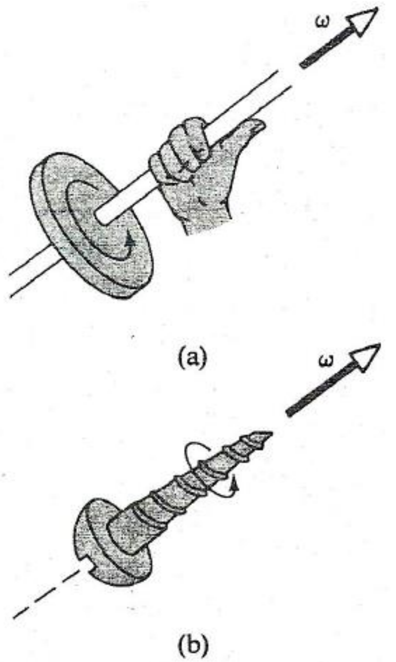
Μπορούμε να εξαγάγουμε πρώτα τη σχέση τής γωνιακής ταχύτητας τού περιστρεφόμενου σώματος με την εφαπτομενική ταχύτητα, $\boldsymbol{v}$, ενός τυχαίου σημείου P τού στερεού σώματος. Εφόσον το P διαγράφει τόξο κύκλου, το διάνυσμα τής γραμμικής ταχύτητάς του κείται στην εφαπτομενική διεύθυνση και γι' αυτό ονομάζουμε την v *εφαπτομενική ταχύτητα*. Εξ ορισμού, το μέτρο της είναι ds/dt, όπου s είναι η απόσταση την οποία διήνυσε το σημείο πάνω

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει μονάδες rad/s^2 ή s^{-2}. Να σημειωθεί ότι η α είναι θετική όταν η ω αυξάνεται και αρνητική όταν η ω μειώνεται.

Στην περίπτωση *περιστροφής γύρω από έναν σταθερό άξονα όλα τα μέρη τού στερεού σώματος έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση*. Δηλαδή, οι ποσότητες ω και α περιγράφουν την περιστροφή *ολόκληρου* τού στερεού σώματος. Η γωνιακή μετατόπιση (θ), η γωνιακή ταχύτητα (ω) και η γωνιακή επιτάχυνση (α) είναι μεγέθη αντίστοιχα προς την γραμμική μετατόπιση (x), τη γραμμική ταχύτητα (v) και τη γραμμική επιτάχυνση (a), τις οποίες εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 3. Οι ποσότητες θ, ω και α διαφέρουν διαστασιακά από τις x, v και a κατά έναν παράγοντα μήκους.

Μολονότι περιγράψαμε πώς ορίζονται τα πρόσημα τών ω και α δεν ορίσαμε ακόμη την κατεύθυνση στον χώρο την οποία έχουν αυτές οι διανυσματικές ποσότητες$^{(1)}$. Πάντως, για περιστροφή γύρω από έναν σταθερό άξονα, η μόνη σταθερή διεύθυνση στον χώρο η οποία ορίζει μονοσήμαντα την περιστροφική κίνηση είναι η διεύθυνση τού άξονα. Πρέπει, όμως, να ορίσουμε και την κατεύθυνση επάνω στον άξονα αυτό, δηλαδή εάν η κατεύθυνση είναι προς το επίπεδο τής σελίδας ή προς τα έξω τού επιπέδου αυτού (Σχήμα 10.1).

Όπως έχουμε ήδη τονίσει, η διεύθυνση τού $\boldsymbol{\omega}$ συμπίπτει με τη διεύθυνση τού άξονα z (Σχήμα 10.1). Κατά συνθήκην θεωρούμε ότι η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{\omega}$ είναι προς τα *έξω* τού επιπέδου τού διαγράμματος όταν η φορά τής στροφής είναι αντίθετη προς τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού και ότι η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{\omega}$ είναι *προς* το επίπεδο τού διαγράμματος όταν η περιστροφή γίνεται σύμφωνα με τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού. Για να εξηγήσουμε με εικόνες την παραπάνω συνθήκη ας χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα τού *δεξιόστροφου κοχλία,* όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.3a. Όταν τα τέσσερα δάκτυλα περιστρέφονται σύμφωνα με την κατεύθυνση περιστροφής τού σώματος, τότε ο αντίχειρας (το μεγάλο δάκτυλο) δείχνει την κατεύθυνση τού $\boldsymbol{\omega}$. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 10.3b με τη φορά βιδώματος δεξιόστροφου κοχλία. Τέλος, η κατεύθυνση τής α ακολουθεί τον ορισμό τού $d\omega/dt$. Έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\boldsymbol{\omega}$ εάν το μέτρο τής γωνιακής ταχύτητας αυξάνεται συναρτήσει τού χρόνου και έχει αντίθετη κατεύθυνση με το $\boldsymbol{\omega}$ εάν το μέτρο τής γωνιακής ταχύτητας ελαττώνεται συναρτήσει τού χρόνου.



Σχήμα 10.3 (a) Ο κανόνας τού δεξιόστροφου κοχλία (βίδας) μάς δείχνει την κατεύθυνση τής γωνιακής ταχύτητας. (b) Η $\boldsymbol{\omega}$ κατευθύνεται προς τα εκεί που προχωρεί ένας δεξιόστροφος κοχλίας.

10.2 ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ: ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΓΩΝΙΑΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Κατά τη μελέτη τής γραμμικής κίνησης είδαμε ότι η απλούστερη μορφή επιταχυνόμενης κίνησης είναι η ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (Κεφάλαιο 3). Παρόμοια, λοιπόν, και κατά την εξέταση τής περιστροφικής κίνησης γύρω από σταθερό άξονα θα αρχίσουμε τη μελέτη μας με την απλούστερη επιταχυνόμενη κίνηση, που είναι η περιστροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Συνεπώς, το επόμενο βήμα μας είναι να βρούμε τις εξισώσεις περιστροφικής κίνησης με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Εάν γράψουμε την Εξίσωση 10.5 στη μορφή $d\omega = \alpha dt$ και συμβολίσουμε την ω που αντιστοιχεί στη στιγμή $t_0 = 0$ με το ω_0, μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατευθείαν:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (\alpha = \text{σταθερό}) \tag{10.6}$$

Επίσης, θέτουμε την Εξίσωση 10.6 στην Εξίσωση 10.3, ολοκληρώνουμε ακόμη μία φορά (συμβολίζοντας το $\theta = \theta_0$ κατά τη στιγμή $t_0 = 0$) και βρίσκουμε

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \tag{10.7}$$

στον κύκλο. Όπως θυμάστε όμως, $s = r\theta$, όπου η ακτίνα r είναι σταθερή, διότι ο άξονας περιστροφής είναι ακίνητος. Έτσι

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r\omega \tag{10.9}$$

Δηλαδή, το μέτρο τής εφαπτομενικής ταχύτητας ενός τυχαίου σημείου το οποίο κείται πάνω σε ένα περιστρεφόμενο σώμα ισούται με το γινόμενο τής γωνιακής ταχύτητας περιστροφής επί την απόσταση τού σημείου από τον άξονα περιστροφής. Επομένως, μολονότι όλα τα σημεία επάνω στο *στερεό σώμα* έχουν την ίδια *γωνιακή ταχύτητα*, δεν έχουν την ίδια *γραμμική ταχύτητα*. Η Εξίσωση 10.9 δείχνει μάλιστα ότι το μέτρο τής γραμμικής ταχύτητας αυξάνεται γραμμικά, καθώς αυξάνεται η απόσταση τού υπό μελέτην σημείου από τον άξονα περιστροφής, όπως θα αναμενόταν.

Μπορούμε να βρούμε τη σχέση τής γωνιακής επιτάχυνσης ενός περιστρεφόμενου στερεού σώματος με την εφαπτομενική επιτάχυνση τού σημείου P εάν υπολογίσουμε την ως προς τον χρόνο παράγωγο τής $\mathbf{v}$:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha \tag{10.10}$$

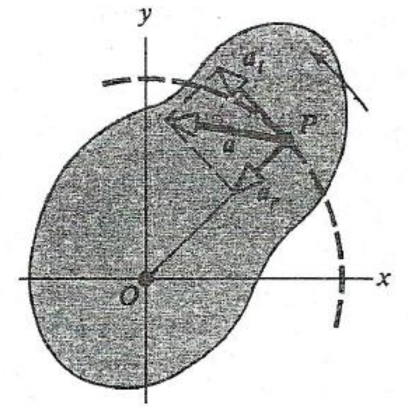
Δηλαδή, η εφαπτομενική συνιστώσα τής γραμμικής επιτάχυνσης ενός σημείου το οποίο κείται πάνω σε ένα περιστρεφόμενο στερεό σώμα ισούται με το γινόμενο τής γωνιακής επιτάχυνσης επί την απόσταση τού σημείου από τον άξονα περιστροφής.

Στο Κεφάλαιο 4 είδαμε ότι ένα σημείο που περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά υπόκειται σε κεντρομόλο, ή ακτινική, επιτάχυνση μέτρου v^2/r και κατεύθυνσης προς το κέντρο περιστροφής (Σχήμα 10.5). Γνωρίζουμε ότι για ένα τυχαίο σημείο P πάνω στο σώμα ισχύει $v = r\omega$. Έτσι η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{10.11}$$

Η *ολική γραμμική επιτάχυνση* τού σώματος είναι $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_r$. Επομένως, το μέτρο τής ολικής γραμμικής επιτάχυνσης τού σημείου P το οποίο βρίσκεται πάνω στο περιστρεφόμενο στερεό σώμα είναι

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{10.12}$$

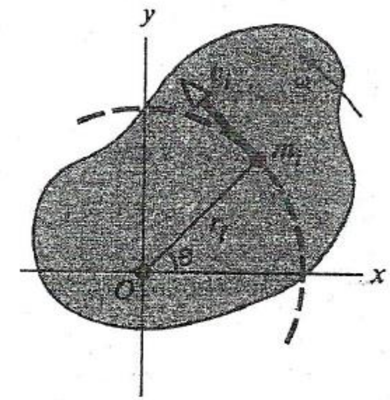


Σχήμα 10.5 Καθώς ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό άξονα που διέρχεται από το O, στο σημείο P έχει εφαπτομενική συνιστώσα $\boldsymbol{a}_t$ τής επιτάχυνσης και κεντρομόλο συνιστώσα $\boldsymbol{a}_r$. Η συνολική επιτάχυνση τού σημείου είναι $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_r$.

10.4 ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Ας θεωρήσουμε ότι ένα στερεό σώμα είναι συσσωμάτωμα μικρών σωμάτων και ας υποθέσουμε ότι το στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω (Σχήμα 10.6). Καθένα από τα σωμάτια που αποτελούν το στερεό σώμα έχει κινητική ενέργεια η οποία εξαρτάται από τη μάζα και την ταχύτητα. Εάν η μάζα τού σωματίου i είναι m_i και έχει μέτρο ταχύτητας v_i, η κινητική ενέργεια τού σωματίου αυτού είναι

$$K_i = \tfrac{1}{2} m_i {v_i}^2$$



Σχήμα 10.6 Ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα τών z με γωνιακή ταχύτητα ω. Η κινητική ενέργεια τού σωματίου μάζας m_i είναι $\frac{1}{2}m_i{v_i}^2$. Η ολική κινητική ενέργεια τού σώματος είναι $\frac{1}{2}I\omega^2$.

Για να προχωρήσουμε πρέπει να θυμηθούμε ότι, αν και κάθε ένα από τα επιμέρους σωμάτια που αποτελούν το στερεό σώμα έχει την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, το μέτρο τής γραμμικής ταχύτητας καθενός από τα επιμέρους σωμάτια εξαρτάται από την απόσταση r_i από τον άξονα περιστροφής, διότι $v_i = r_i\omega$ (Εξίσωση 10.9). Η *ολική* κινητική ενέργεια τού περιστρεφόμενου στερεού σώματος είναι το άθροισμα τών κινητικών ενεργειών τών επιμέρους σωματίων:

$$K = \sum K_i = \sum \tfrac{1}{2} m_i {v_i}^2 = \tfrac{1}{2}\sum m_i {r_i}^2 \omega^2$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i {r_i}^2\right)\omega^2 \qquad (10.13)$$

όπου το ω^2 βρίσκεται έξω από το άθροισμα, διότι είναι το *ίδιο* για κάθε σωμάτιο. Η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση τής Εξίσωσης 10.13 ονομάζεται **ροπή αδράνειας** και συμβολίζεται με I:

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad (10.14)$$

Ξαναγράφουμε λοιπόν την κινητική ενέργεια περιστρεφόμενου σώματος και χρησιμοποιούμε εδώ αυτόν τον συμβολισμό

$$K = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad (10.15)$$

Από τον ορισμό τής ροπής αδράνειας βλέπουμε ότι αυτή έχει διαστάσεις ML^2 και μονάδες kg·m^2 στο SI ή g·cm^2 στο cgs). Στις εξισώσεις που περιγράφουν περιστροφές παίζει ρόλο αντίστοιχο με τον ρόλο τής μάζας. Αν και θα ονομάσουμε την ποσότητα $\frac{1}{2}I\omega^2$ **κινητική ενέργεια περιστροφής** (δηλαδή κινητική ενέργεια που προέρχεται από την περιστροφή), αυτή δεν είναι νέα μορφή ενέργειας. Είναι η γνωστή μας κινητική ενέργεια και την βρήκαμε αθροίζοντας την κινητική ενέργεια τών επιμέρους σωματίων τα οποία συναποτελούν το στερεό σώμα. Πάντως, η μορφή τής Εξίσωσης 10.15 διευκολύνει στη μελέτη τών περιστροφών εάν ξέρουμε πώς να υπολογίσουμε το I. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε την αντιστοιχία ανάμεσα στην κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}mv^2$ που προέρχεται από γραμμική (μεταφορική) κίνηση και την κινητική ενέργεια περιστροφής $\frac{1}{2}I\omega^2$. Οι ποσότητες I και ω τής περιστροφικής κίνησης αντιστοιχούν στις m και v τής γραμμικής κίνησης. Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα περιγράψουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε ροπές αδράνειας στερεών σωμάτων. Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν πώς υπολογίζουμε ροπές αδράνειας και κινητικές ενέργειες περιστροφής διαφόρων κατανομών σωματίων.

10.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΩΝ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας αντικειμένων οποιουδήποτε σχήματος και μεγέθους εάν τά χωρίσουμε νοερά σε πολλά στοιχεία μάζας Δm. Χρησιμοποιούμε τον ορισμό $I = \Sigma r^2 \Delta m$ παίρνουμε το όριο τού $\Delta m \to 0$ και μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα. Ολοκληρώνουμε πάνω σε ολόκληρο τον όγκο που κατέχει το σώμα. Η r είναι η κάθετη απόσταση του στοιχείου Δm από τον άξονα περιστροφής. Έτσι

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r^2 \, \Delta m = \int r^2 \, dm \tag{10.16}$$

Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας με τη βοήθεια τής Εξίσωσης 10.16 πρέπει να εκφράσουμε το στοιχείο μάζας dm συναρτήσει τών συντεταγμένων του. Έτσι πρέπει να ορίσουμε την έννοια τής *πυκνότητας*, δηλαδή *τής μάζας ανά μονάδα όγκου*. Γράφουμε λοιπόν

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

$$dm = \rho dV$$

Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τη ροπή αδράνειας ως

$$I = \int \rho r^2 \, dV$$

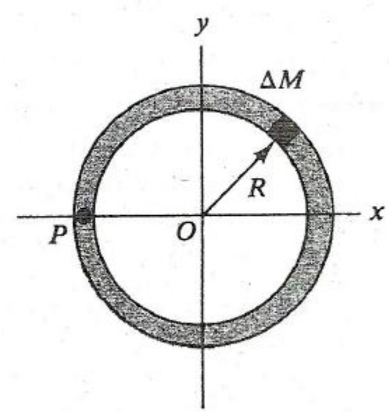
Εάν το σώμα είναι ομογενές (δηλαδή έχει σταθερή πυκνότητα ρ), τότε, εφόσον γνωρίζουμε τη γεωμετρική περιγραφή του, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα. Εάν η πυκνότητα ρ δεν είναι σταθερή, τότε πρέπει να γνωρίζουμε τη συναρτησιακή της εξάρτηση από τον χώρο. Εάν το σώμα έχει τη μορφή πλάκας σταθερού πάχους t, μάς είναι εύκολο να ορίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = \rho t$, που περιγράφει *τη μάζα ανά μονάδα επιφάνειας*. Τέλος, εάν έχουμε μια γραμμική κατανομή μάζας όπως σε μια ράβδο διατομής A, χρησιμοποιούμε την έννοια τής γραμμικής πυκνότητας $\lambda = \rho A$, που περιγράφει *μάζα ανά μονάδα μήκους*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.5 Ομογενές στεφάνι

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ενός ομογενούς στεφανιού μάζας M και ακτίνας R ως προς έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο τού στεφανιού ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του (Σχήμα 10.8).

Λύση Όλα τα στοιχεία τής μάζας έχουν την ίδια σταθερή απόσταση $r = R$ από τον άξονα. Έτσι εφαρμόζουμε την Εξίσωση 10.16 και βρίσκουμε ότι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z ο οποίος διέρχεται από το O είναι

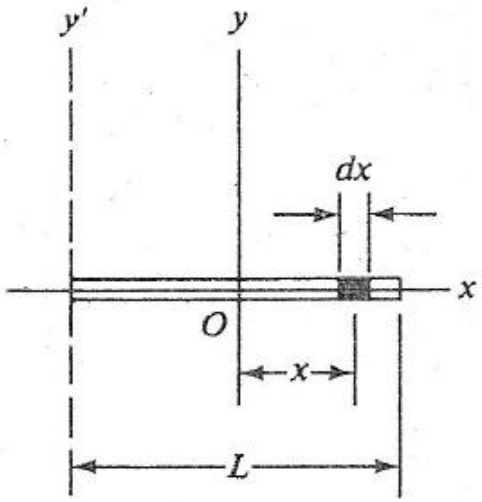
$$I_z = \int r^2 \, dm = R^2 \int dm = MR^2$$



Σχήμα 10.8 (Παράδειγμα 10.5) Όλα τα στοιχεία μάζας ενός ομογενούς δακτυλιδιού (κρίκου) έχουν την ίδια απόσταση από το O.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.6 Ομογενής στερεά ράβδος □

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας μιας ομογενούς στερεάς ράβδου μήκους L και μάζας M (Σχήμα 10.9) ως προς έναν άξονα κάθετο στη ράβδο (άξονα y) ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας της.



Σχήμα 10.9 (Παράδειγμα 10.6) Ομογενής στερεά ράβδος μήκους L. Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι μικρότερη από τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y'.

Λύση Το γραμμοσκιασμένο στοιχείο dx έχει μάζα dm που ισούται με το γινόμενο τής μάζας ανά μονάδα μήκους επί το στοιχείο μήκους dx. Δηλαδή, $dm = \frac{M}{L}\,dx$. Θέτουμε την έκφραση αυτή στην Εξίσωση 10.16 ορίζουμε $r = x$ και βρίσκουμε

$$I_y = \int r^2\,dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L}\,dx = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2\,dx$$

$$= \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2$$

Άσκηση 3 Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας μιας ομογενούς στερεάς ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο ένα άκρο τής ράβδου (τον άξονα y'). Ας σημειωθεί ότι στον υπολογισμό αυτόν τα όρια τού ολοκληρώματος είναι $x = 0$ και $x = L$.

Απάντηση $\frac{1}{3}ML^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.7 Ομογενής στερεός κύλινδρος

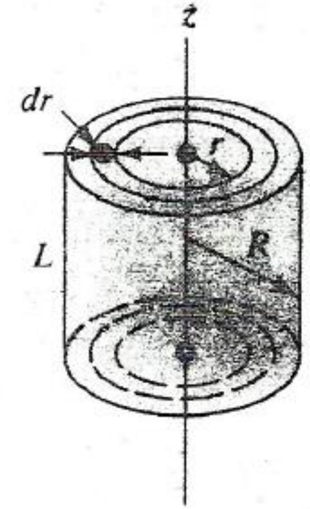
Ένας ομογενής στερεός κύλινδρος έχει ακτίνα R, μάζα M και μήκος L. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας τού κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του (τον άξονα z στο Σχήμα 10.10).

Λύση Στο πρόβλημα αυτό, για διευκόλυνσή μας, χωρίζουμε τον κύλινδρο σε κυλινδρικούς φλοιούς ακτίνας r, πάχους dr και μήκους L, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.10. Ο χωρισμός σε κυλινδρικούς φλοιούς επιλέγεται διότι, χάρη στην κυλινδρική συμμετρία, όλα τα στοιχεία μάζας dm θα έχουν την ίδια ακτίνα r και έτσι απλουστεύεται ο υπολογισμός τής ροπής αδράνειας I. Ο όγκος καθενός φλοιού είναι το γινόμενο τής διατομής του dA επί το μήκος του L, δηλαδή $dV = dA \cdot L = (2\pi r\ dr)L$. Εάν *η μάζα ανά μονάδα όγκου* είναι ϱ, τότε η μάζα τού στοιχείου όγκου dV είναι $dm = \varrho dV = \varrho\, 2\pi r L\, dr$. Θέτουμε αυτό στην Εξίσωση 10.16 και έχουμε

$$I_z = \int r^2\, dm = 2\pi\rho L \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi\rho L R^4}{2}$$

Αλλά ξέρουμε ότι ο ολικός όγκος τού κυλίνδρου είναι $\pi R^2 L$ και επομένως $\varrho = M/V = M/\pi R^2 L$. Θέτουμε το αποτέλεσμα αυτό στην τελευταία εξίσωση και βρίσκουμε

$$I_z = \tfrac{1}{2} M R^2$$



Σχήμα 10.10 (Παράδειγμα 10.7) Υπολογισμός τής ροπής αδράνειας ενός ομογενούς συμπαγούς κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, είναι εύκολο να υπολογιστούν οι ροπές αδράνειας στερεών σωμάτων με απλά συμμετρικά σχήματα, εφόσον ο άξονας περιστροφής συμπίπτει με έναν άξονα συμμετρίας. Στον Πίνακα 10.2 θα βρείτε τις ροπές αδράνειας οι οποίες αντιστοιχούν σε διάφορα σώματα για διάφορους άξονες περιστροφής[2].

Ο υπολογισμός ροπών αδράνειας ως προς έναν αυθαίρετο άξονα μπορεί να είναι πολυπλοκότατος ακόμη και για ένα πολύ συμμετρικό σώμα, όπως π.χ. είναι η σφαίρα. Για να διευκολυνθούμε λοιπόν χρησιμοποιούμε ένα σπουδαίο θεώρημα, το *θεώρημα τών παράλληλων αξόνων* (ή θεώρημα τού Steiner), με το οποίο απλουστεύεται ο υπολογισμός. Υποθέστε ότι η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς έναν οποιονδήποτε άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του είναι I_c. Σύμφωνα με το θεώρημα τών παράλληλων αξόνων, η ροπή αδράνειας ως προς έναν άξονα που είναι *παράλληλος* και έχει απόσταση D από τον άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι

$$I = I_c + MD^2 \tag{10.17}$$

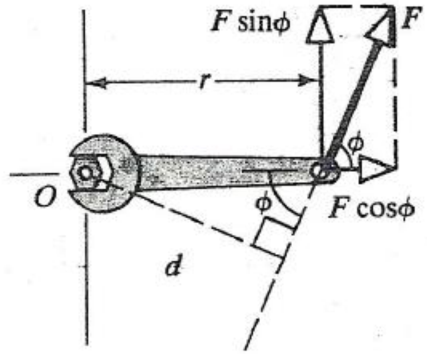
10.6 ΡΟΠΗ

Όταν ασκούμε δύναμη πάνω σε ένα στερεό σώμα διά μέσου τού οποίου διέρχεται ένας άξονας τότε το σώμα θα περιστραφεί γύρω από τον άξονα. Περιγράφουμε ποσοτικά την ικανότητα μιας δύναμης να περιστρέφει ένα σώμα γύρω από έναν άξονα (ή κάποιο σημείο) με μία ποσότητα την οποία ονομάζουμε **ροπή** και την οποία συμβολίζουμε με το γράμμα τού ελληνικού αλφαβήτου $\boldsymbol{\tau}$. Θεωρήστε ότι έχουμε ένα κλειδί, όπως παριστάνεται στο Σχήμα 10.12, το οποίο περιστρέφεται γύρω από το σημείο O. Η εφαρμοζόμενη δύναμη $\boldsymbol{F}$, στη γενική περίπτωση, σχηματίζει γωνία ϕ με την οριζόντιο.

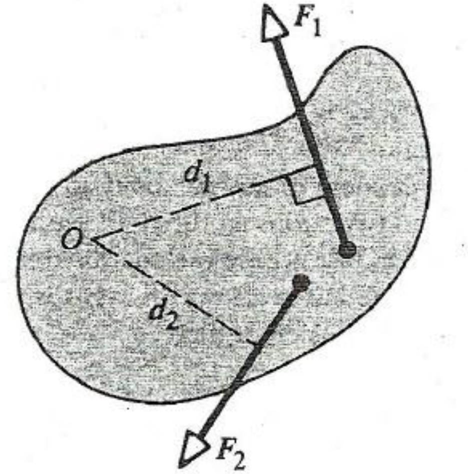
Ορίζουμε το μέτρο τής ροπής τ που οφείλεται στην εφαρμογή τής δύναμης $\boldsymbol{F}$ ως προς το σημείο O, ως εξής

$$\tau = rF \sin \phi = Fd \tag{10.18}$$

Είναι σημαντικό να έχουμε κατανοήσει ότι *η έννοια τής ροπής ορίζεται μόνο σε σχέση με έναν καθορισμένο άξονα ή ένα καθορισμένο σημείο*. Η ποσότητα $d = r \sin \phi$ ονομάζεται μοχλοβραχίονας τής δύναμης $\boldsymbol{F}$ και είναι η κάθετη απόσταση ανάμεσα στον άξονα περιστροφής και στην κατεύθυνση τής $\boldsymbol{F}$. Να σημειωθεί ότι μόνο η κάθετη συνιστώσα τής δύναμης στο r, η $F \sin \phi$, τείνει να περιστρέψει το κλειδί. Η άλλη συνιστώσα, η $F \cos \phi$, που διέρχεται από το O, δεν επηρεάζει την περιστροφή. Εάν δρουν επάνω στο σώμα περισσότερες από μία δυνάμεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.13, τότε η



Σχήμα 10.12 Το κλειδί περιστρέφεται πιο εύκολα όταν αυξάνεται η F ή ο μοχλοβραχίονας d. Εκείνο που περιστρέφει το σύστημα γύρω από το O είναι η συνιστώσα $F \sin \phi$.



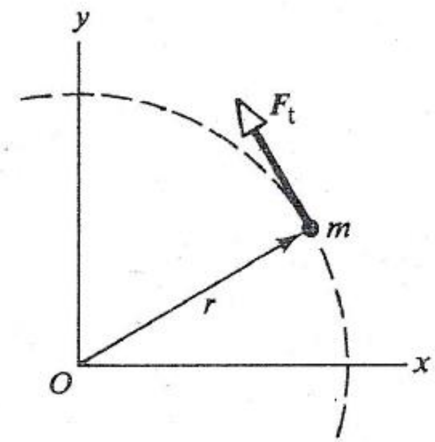
Σχήμα 10.13 Η δύναμη $\boldsymbol{F}_1$ τείνει να περιστρέψει το σώμα γύρω από το O κατά φορά αντίθετη από τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού, ενώ η $\boldsymbol{F}_2$ τείνει να τό περιστρέψει κατά φορά όμοια με τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού.

καθεμιά τους τείνει να περιστρέψει το σώμα γύρω από το O. Λογουχάρη, η $\boldsymbol{F}_2$ τείνει να περιστρέψει το σώμα κατά τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού, ενώ η $\boldsymbol{F}_1$ τείνει να τό περιστρέψει αντίθετα από τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού. Θα συμφωνήσουμε να θέτομμε θετικό πρόσημο στη ροπή εάν η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού και αρνητικό πρόσημο εάν η περιστροφή είναι κατά τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού. Λογουχάρη, στο Σχήμα 10.13, η ροπή που οφείλεται στη δύναμη $\boldsymbol{F}_1$, η οποία έχει μοχλοβραχίονα d_1, είναι *θετική* και ίση με $+ F_1 d_1$. Η ροπή τής $\boldsymbol{F}_2$ είναι *αρνητική* και ίση με $- F_2 d_2$. Επομένως, η *ολική* ροπή πάνω στο σώμα, υπολογιζόμενη ως προς το σημείο O, είναι

$$\tau_{\text{net}} = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

10.7 ΣΧΕΣΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΗ ΡΟΠΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΓΩΝΙΑΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα δείξουμε ότι η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα είναι ανάλογη προς την υπολογιζόμενη ως προς τον ίδιο άξονα ολική ροπή. Προτού μελετήσουμε την περίπτωση τής περιστροφής ενός στερεού σώματος είναι σκόπιμο να μελετήσουμε για λίγο την περίπτωση ενός σώματος που περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό σημείο υπό την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης. Κατόπιν θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο τρόπο, καθώς και τα αποτελέσματα που θα προκύψουν, για να μελετήσουμε την περίπτωση ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα.



Σχήμα 10.15 Σώμα που κινείται διαγράφοντας κύκλο υπό την επίδραση τής εφαπτομενικής δύναμης $\boldsymbol{F}_t$. Για να διατηρηθεί η κυκλική κίνηση πρέπει να υπάρχει η κεντρομόλος δύναμη $\boldsymbol{F}_r$, που δεν φαίνεται στο σχήμα.

Θεωρήστε ότι ένα σώμα μάζας m περιστρέφεται πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας r υπό την επίδραση μιας εφαπτομενικής δύναμης $\boldsymbol{F}_t$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.15, και μιας κεντρομόλου δύναμης $\boldsymbol{F}_r$, που δεν φαίνεται στο Σχήμα. (Προφανώς, η κεντρομόλος είναι *απαραίτητη* για να κινείται το σώμα σε κυκλική τροχιά). Η εφαπτομενική δύναμη προκαλεί την εφαπτομενική επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_t$ και

$$F_t = ma_t$$

Η ροπή, ως προς την αρχή τών συντεταγμένων, τής δύναμης $\boldsymbol{F}_t$ είναι ίση με το γινόμενο τού μέτρου τής δύναμης και τού μοχλοβραχίονα τής δύναμης:

$$\tau = F_t r = (ma_t)r$$

Ξέρουμε όμως ότι η εφαπτομενική επιτάχυνση σχετίζεται με τη γωνιακή επιτάχυνση μέσω τής σχέσης $a_t = r\alpha$, Έτσι μπορούμε να ξαναγράψουμε την ροπή ως

$$\tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha$$

Αλλά η ποσότητα mr^2 είναι η ροπή αδράνειας τής περιστρεφόμενης μάζας ως προς τον άξονα z, ο οποίος διέρχεται από την αρχή τών συντεταγμένων. Έτσι

$$\tau = I\alpha \tag{10.19}$$

Δηλαδή, *η ροπή που δρα πάνω σε ένα σώμα είναι ανάλογη προς τη γωνιακή του επιτάχυνση* και η σταθερά τής αναλογίας είναι η ροπή αδράνειας. Πρέπει να σημειωθεί ότι η σχέση $\tau = I\alpha$ είναι για την περιστροφή η αντίστοιχη εξίσωση τού δεύτερου νόμου τού Newton $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

Ας επεκτείνουμε τώρα τη μελέτη μας σε ένα στερεό σώμα, οποιουδήποτε σχήματος, το οποίο περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα, όπως παριστάνεται στο Σχήμα 10.16. Θεωρήστε ότι το σώμα αποτελείται από άπειρο αριθμό μικρών μερών απειροστής μάζας dm. Το κάθε μέρος μάζας περιστρέφεται διαγράφοντας κύκλο γύρω από την αρχή τών συντεταγμένων και καθένα έχει εφαπτομενική επιτάχυνσση $\boldsymbol{a}_t$, που οφείλεται σε μια εφαπτομενική δύναμη $d\boldsymbol{F}_t$. Ξέρουμε από τον δεύτερο νόμο τού Newton ότι για κάθε μέρος τού σώματος ισχύει

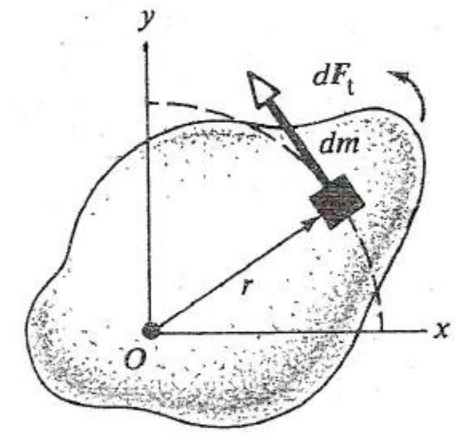
$$dF_t = (dm)a_t$$

Η ροπή $d\tau$ που οφείλεται στην δύναμη $d\boldsymbol{F}_t$, ως προς την αρχή τών συντεταγμένων, είναι

$$d\tau = r\,dF_t = (r\,dm)a_t$$

Αλλά $a_t = r\alpha$, Έτσι ξαναγράφουμε την τελευταία σχέση ως

$$d\tau = (r\,dm)r\alpha = (r^2\,dm)\alpha$$



Σχήμα 10.16 Ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το O. Το καθένα στοιχείο μάζας dm περιστρέφεται γύρω από το O με την ίδια γωνιακή επιτάχυνση α. Η ολική ροπή που ασκείται πάνω στο σώμα είναι ανάλογη προς την α.

Είναι πολύ σημαντικό να έχουμε υπ' όψιν ότι αν και κάθε σημείο πάνω στο στερεό σώμα μπορεί να έχει διαφορετική εφαπτομενική επιτάχυνση a_t, όλα τα απειροστά μέρη μάζας πού τό αποτελούν έχουν την *ίδια γωνιακή επιτάχυνση* α. Έτσι, ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε την ολική ροπή γύρω από το O:

$$\tau_{\text{net}} = \int (r^2\,dm)\alpha = \alpha \int r^2\,dm$$

όπου θέσαμε τα γωνιακή επιτάχυνση α έξω από το ολοκλήρωμα, διότι είναι κοινός παράγοντας επειδή είναι ίδια για όλα τα μέρη μάζας. Η ροπή αδράνειας τού σώματος γύρω από τον άξονα περιστροφής ο οποίος διέρχεται από το O ορίζεται ότι είναι $I = \int r^2\,dm$. Έτσι η έκφραση για την ολική ροπή γράφεται ως

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \tag{10.20}$$

Και πάλι βλέπουμε ότι η ολική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ανάλογη προς τη γωνιακή επιτάχυνση και ότι η σταθερά τής αναλογίας είναι η ροπή αδράνειας I. Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι η I εξαρτάται από τον άξονα περιστροφής και από το μέγεθος και το σχήμα τού σώματος.

Εάν σκεφθούμε πόσο σύνθετο είναι το σύστημα, το σημαντικότατο αποτέλεσμα $\tau = I\alpha$ είναι πράγματι πολύ απλό και απόλυτα σύμφωνο με τις πειραματικές μετρήσεις. Το ότι το αποτέλεσμα είναι τόσο απλό οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο περιγράφεται η κίνηση.

Μολονότι τα σημεία ενός στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα μπορεί να μην υπόκεινται στην ίδια δύναμη και να μην έχουν την ίδια γραμμική επιτάχυνση ή γραμμική ταχύτητα, όλα έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση και γωνιακή ταχύτητα. Επομένως, οποιαδήποτε στιγμή το περιστρεφόμενο στερεό σώμα περιγράφεται από χαρακτηριστικές τιμές τής γωνιακής επιτάχυνσης, τής ολικής ροπής και τής γωνιακής ταχύτητας.

Τέλος, πρέπει να ξέρουμε ότι το αποτέλεσμα $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ ισχύει ακόμη και εάν οι δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω στις στοιχειώδεις μάζες έχουν όχι μόνο εφαπτομενικές συνιστώσες αλλά και ακτινικές. Αυτό οφείλεται, απλούστατα, στο ότι οι ακτινικές συνιστώσες πρέπει να διέρχονται από τον άξονα περιστροφής και επομένως έχουν *μηδενική* ροπή ως προς τον άξονα αυτόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.10 Περιστρεφόμενη ράβδος

Μια ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, χωρίς τριβή, γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το ένα άκρο της. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη, ενώ αρχικά ηρεμούσε σε οριζόντια θέση.

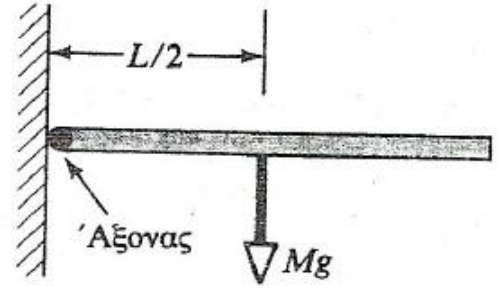
Ποια είναι η *αρχική* γωνιακή επιτάχυνση τής ράβδου και ποια η *αρχική* γραμμική επιτάχυνση τού δεξιού άκρου της;

Λύση Το βάρος τής ράβδου Mg δρα στο κέντρο μάζας, που συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.17. Το μέτρο τής ροπής που οφείλεται στη βαρύτητα ως προς το σημείο περιστροφής το οποίο βρίσκεται στο άκρο τής ράβδου είναι

$$\tau = \frac{MgL}{2}$$

Η δύναμη τής αντίδρασης τού άξονα έχει μηδενική ροπή ως προς τον άξονα, διότι έχει μηδενικό μοχλοβραχίονα ($r = 0$). Επειδή $\tau = I\alpha$, όπου $I = \frac{1}{3}ML^2$ για τον συγκεκριμένο άξονα περιστροφής (βλ. Πίνακα 10.2), έχουμε

$$I\alpha = Mg\frac{L}{2}$$



Σχήμα 10.17 (Παράδειγμα 10.10) Η ομογενής αυτή ράβδος περιστρέφεται γύρω από το αριστερό άκρο της.

$$\alpha = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Όλα τα σημεία τής ράβδου έχουν αυτή την τιμή τής γωνιακής επιτάχυνσης.

Για να βρούμε τη γραμμική επιτάχυνση τού δεξιού άκρου τής ράβδου χρησιμοποιούμε τη σχέση $a_t = R\alpha$, όπου $R = L$. Έτσι βρίσκουμε

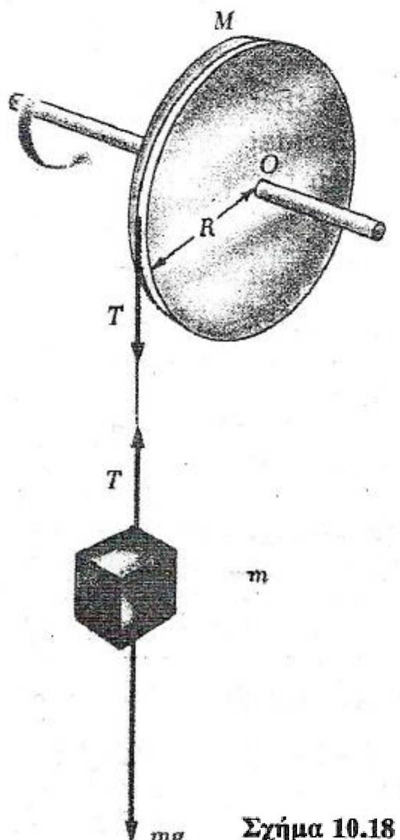
$$a_t = L\alpha = \tfrac{3}{2}g$$

Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον διότι $a_t > g$. Δηλαδή, το άκρο τής ράβδου υπόκειται σε επιτάχυνση *μεγαλύτερη* από την επιτάχυνση τής βαρύτητας. Έτσι, εάν τοποθετούσαμε στο άκρο τής ράβδου ένα νόμισμα, το άκρο της θα έπεφτε γρηγορότερα από το νόμισμα.

Τα άλλα σημεία τής ράβδου έχουν γραμμική επιτάχυνση μικρότερη από $\frac{3}{2}g$. Λογουχάρη, το μέσο τής ράβδου υπόκειται σε επιτάχυνση $\frac{3}{4}g$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.11 Γωνιακή επιτάχυνση ενός τροχού

Ένας τροχός ακτίνας R, μάζας M και ροπής αδράνειας I μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.18. Ένα ελαφρό νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από τον τροχό και από το άκρο του είναι αναρτημένο ένα σώμα μάζας m. Υπολογίστε τη γραμμική επιτάχυνση τού αναρτημένου σώματος, τη γωνιακή επιτάχυνση τού τροχού και την τάση τού νήματος.



Σχήμα 10.18 (Παράδειγμα 10.11) Το νήμα από το οποίο είναι αναρτημένη η m είναι τυλιγμένο γύρω από την τροχαλία. Έτσι παράγεται ροπή γύρω από τον άξονα περιστροφής ο οποίος διέρχεται από το σημείο O.

Λύση Η ροπή πάνω στον τροχό, υπολογιζόμενη ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $\tau = TR$. Το βάρος τού τροχού και η κάθετη δύναμη τού άξονα στον τροχό διέρχονται από τον άξονα περιστροφής και έτσι έχουν μηδενική ροπή. Επειδή $\tau = I\alpha$, βρίσκουμε

$$\tau = I\alpha = TR$$

$$\alpha = TR/I \qquad (1)$$

Ας εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton στην κινούμενη μάζα m, χρησιμοποιώντας το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος (Σχήμα 10.18):

$$\sum F_y = T - mg = -ma$$

$$a = \frac{mg - T}{m} \qquad (2)$$

Η γραμμική επιτάχυνση τής αναρτημένης μάζας ισούται με την εφαπτομενική επιτάχυνση ενός σημείου που βρίσκεται στην περίμετρο τού τροχού. Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση τού τροχού και η παραπάνω γραμμική επιτάχυνση συνδέονται ως $a = R\alpha$. Χρησιμοποιούμε την τελευταία σχέση μαζί με τις (1) και (2) και έχουμε

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

$$T = \frac{mg}{1 + \dfrac{mR^2}{I}}$$

Λύνουμε προς a και α και βρίσκουμε

$$a = \frac{g}{1 + I/mR^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + I/mR}$$

Άσκηση 5 Ο τροχός τού Σχήματος 10.18 είναι ένας συμπαγής δίσκος $M = 2.0$ kg, $R = 30$ cm και $I = 0.09$ kg · m^2. Η αναρτημένη μάζα είναι $m = 0.5$ kg. Βρείτε την τάση τού νήματος και τη γωνιακή επιτάχυνση τού τροχού.
Απάντηση 3.27 N, 10.9 rad/s^2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.12

Δύο μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένες με ένα ελαφρό νήμα το οποίο περνάει πάνω από δύο όμοιες τροχαλίες από τις οποίες η καθεμιά έχει ροπή αδράνειας I (βλ. Σχήμα 10.19a). Βρείτε την επιτάχυνση καθεμιάς μάζας και τις τάσεις $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ και $\boldsymbol{T}_3$ τού νήματος. (Υποθέστε ότι το νήμα δεν γλιστράει στις τροχαλίες).

Λύση Ας γράψουμε πρώτα τον δεύτερο νόμο τού Newton για την κάθε μάζα ξεχωριστά και ας υποθέσουμε ότι $m_2 > m_1$. Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος φαίνεται στο Σχήμα 10.19b.

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \qquad (1)$$

$$m_2 g - T_3 = m_2 a \qquad (2)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εντάξουμε τις τροχαλίες στο πρόβλημα τής κίνησης. Το Σχήμα 10.19c απεικονίζει το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για τις τροχαλίες.

Η ολική ροπή γύρω από τον άξονα τής τροχαλίας στα αριστερά είναι $(T_2 - T_1)R$, ενώ η ολική στη δεξιά τροχαλία είναι $(T_3 - T_2)R$. Ξέρουμε όμως ότι $\tau_{net} = I\alpha$ για κάθε τροχαλία. Επίσης ξέρουμε ότι οι δύο τροχαλίες έχουν την ίδια α Έτσι

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha \qquad (3)$$

$$(T_3 - T_2)R = I\alpha \qquad (4)$$

Έχουμε λοιπόν να λύσουμε ένα σύστημα με τέσσερεις εξισώσεις και τέσσερεις αγνώστους. Προσθέτουμε την (3) και την (4) και έχουμε

$$(T_3 - T_1)R = 2I\alpha \qquad (5)$$

προσθέτουμε την (1) και (2)

$$T_1 - T_3 + m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2)a$$

ή

$$T_3 - T_1 = (m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)a \qquad (6)$$

Θέτουμε την εξίσωση (6) στην (5) και

$$[(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)a]R = 2I\alpha$$

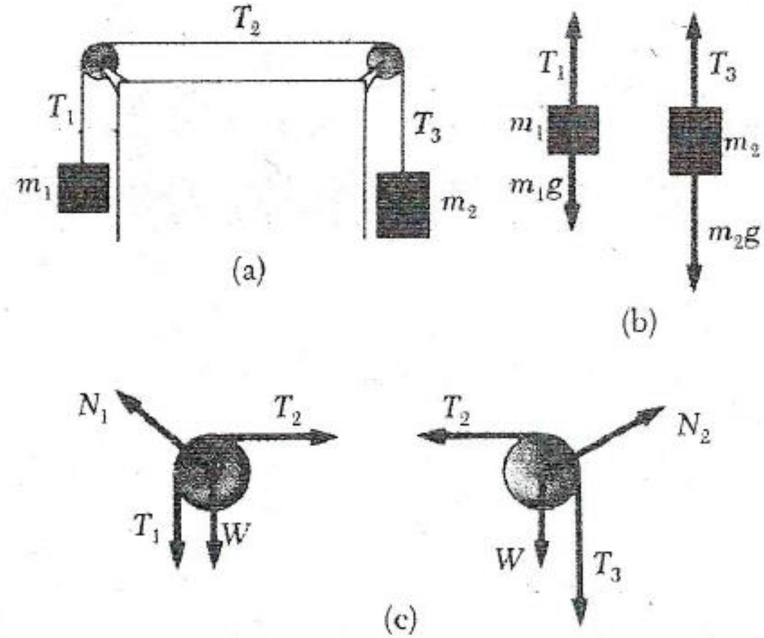
Επειδή όμως $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{a}{R}$

κάνουμε αντικατάσταση στην τελευταία σχέση και έχουμε

$$(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)a = 2I\frac{a}{R^2}$$

ή

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + 2\dfrac{I}{R^2}} \qquad (7)$$



Σχήμα 10.19 (Παράδειγμα 10.12).

10.8 ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Για να συμπληρώσουμε τη μελέτη ενός περιστρεφόμενου στερεού σώματος, πρέπει να εξετάσουμε τη σχέση που έχει η μεταβολή τής κινητικής ενέργειας περιστροφής με το έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις.

Θα περιορίσουμε και πάλι τη μελέτη μας σε περιστροφές γύρω από έναν σταθερό άξονα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Θα δούμε επίσης ότι η σημαντική σχέση $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ στην οποία είχαμε εξαγάγει στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, μπορεί να αποδειχθεί εκ νέου, εάν λάβουμε υπ' όψιν τον ως προς τον χρόνο ρυθμό μεταβολής τής ενέργειας.

Θεωρήστε ότι ένα στερεό σώμα μπορεί να περιστραφεί γύρω από το σημείο O, όπως παριστάνεται στο Σχήμα 10.20. Υποθέστε ότι μία μόνο εξωτερική δύναμη, η $\mathbf{F}$, δρα πάνω στο σώμα, στο σημείο P. Το παραγόμενο από την $\mathbf{F}$ έργο καθώς το σώμα περιστρέφεται κατά μία απειροστή απόσταση $ds = r\, d\theta$, σε χρόνο dt, είναι

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F \sin \phi) r\, d\theta$$

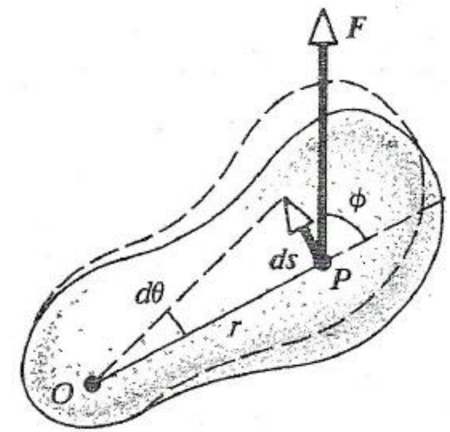
όπου $F \sin \phi$ είναι η εφαπτομενική συνιστώσα τής $\mathbf{F}$, δηλαδή η συνιστώσα τής δύναμης πάνω στη διεύθυνση τής διαδρομής. Να ληφθεί υπ' όψιν ότι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.20, *η ακτινική συνιστώσα τής* $\mathbf{F}$ *δεν παράγει έργο, διότι είναι κάθετη στην μετατόπιση.*

Ξέρουμε ότι το μέτρο τής ροπής που προκαλεί η $\mathbf{F}$ γύρω από την αρχή τών συντεταγμένων είναι $rF \sin \phi$. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το έργο που έχει παραχθεί κατά την απειροστή περιστροφή ως

$$dW = \tau\, d\theta \tag{10.21}$$

Ο ρυθμός λοιπόν με τον οποίο παράγεται έργο από την $\mathbf{F}$ καθώς το σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα είναι

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \tag{10.22}$$



Σχήμα 10.20 Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται, γύρω από άξονα που διέρχεται από το O, υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης $\mathbf{F}$ που εφαρμόζεται στο P.

Το θεώρημα έργου-ενέργειας στην περιστροφική κίνηση

Όταν μελετούσαμε τη γραμμική κίνηση είχαμε διαπιστώσει ότι η έννοια τής ενέργειας και ειδικά το θεώρημα έργου-ενέργειας είναι πολύ χρήσιμα κατά την περιγραφή τής κίνησης ενός συστήματος. Η έννοια τής ενέργειας λοιπόν μπορεί να μάς φανεί πολύ χρήσιμη για να απλουστεύσουμε την ανάλυση τής περιστροφικής κίνησης. Όπως ξέρουμε από τη γραμμική κίνηση, θα πρέπει και στην περιστροφική κίνηση ενός συμμετρικού αντικειμένου (όπως π.χ. ενός τροχού) γύρω από έναν σταθερό άξονα το έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις να είναι ίσο προς τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας περιστροφής. Για να δείξουμε ότι πράγματι αυτό ισχύει, θα αρχίσουμε από την σχέση $\tau = I\alpha$. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης τής σύνθετης συνάρτησης και μπορούμε να εκφράσουμε τη ροπή ως

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

Με τη βοήθεια τής παραπάνω σχέσης και τής $\tau\, d\theta = dW$ βρίσκουμε ότι

$$\tau\, d\theta = dW = I\omega\, d\omega$$

Ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε ότι το ολικό έργο είναι

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - \tfrac{1}{2}I{\omega_0}^2 \qquad (10.24)$$

όπου για τα όρια τού ολοκληρώματος βασιστήκαμε στο γεγονός ότι, καθώς η γωνιακή μετατόπιση μεταβάλλεται από θ_0 σε θ, η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται από ω_0 σε ω. Η Εξίσωση 10.24 μάς θυμίζει την αντίστοιχη έκφραση τού θεωρήματος έργου-ενέργειας για μεταφορική κίνηση, όπου η ροπή αδράνειας αντικατέστησε την μάζα m και η γωνιακή ταχύτητα ω τη γραμμική ταχύτητα υ. Δηλαδή

> **στην περίπτωση ενός στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα, το ολικό έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις ισούται με τη μεταβολή τής κινητικής ενέργειας περιστροφής τού σώματος.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.13. Περιστρεφόμενη ράβδος - Ανασκόπηση

Μια ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται μέσα από το ένα άκρο της (Σχήμα 10.21). Ενώ αρχικά η ράβδος ηρεμούσε στην οριζόντια θέση, ξαφνικά αφήνεται ελεύθερη: (a) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα τής ράβδου τη στιγμή κατά την οποία η θέση της γίνεται κατακόρυφη;

Λύση Μπορούμε να απαντήσουμε εύκολα εάν μελετήσουμε τη μηχανική ενέργεια τού συστήματος. Όταν η ράβδος είναι οριζόντια δεν έχει κινητική ενέργεια. Η δυναμική της ενέργεια σε σχέση με την αντίστοιχη τής κατακόρυφης θέσης (οπότε το κέντρο μάζας της βρίσκεται στο σημείο O') είναι $MgL/2$. Όταν λοιπόν η ράβδος φτάσει στην κατακόρυφη διεύθυνση, όλη η δυναμική της ενέργεια έχει γίνει κινητική, $\frac{1}{2}I\omega^2$, όπου I είναι η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα O. Ξέρουμε (από τον Πίνακα 10.2) ότι $I = \frac{1}{3}ML^2$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το θεώρημα διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{2}MgL = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}ML^2)\omega^2$$

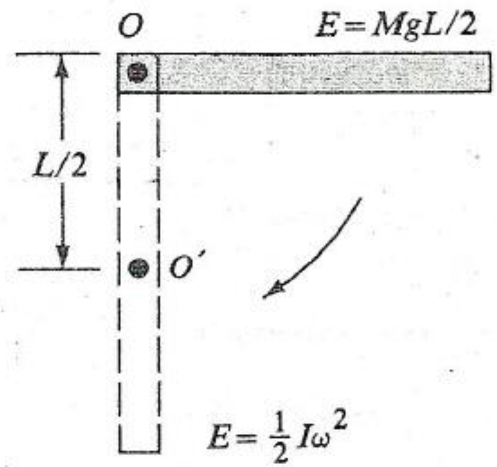
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Έτσι, λογουχάρη, εάν η ράβδος έχει μήκος ένα μέτρο, βρίσκουμε ότι $\omega = 5.42$ rad/s.

(b) Προσδιορίστε τη γραμμική ταχύτητα τού κέντρου μάζας και τη γραμμική ταχύτητα τού ελεύθερου άκρου τής ράβδου στην κατακόρυφη θέση.

$$v_c = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

Το ελεύθερο άκρο τής ράβδου έχει λοιπόν γραμμική ταχύτητα ίση προς $2v_c = \sqrt{3gL}$.



Σχήμα 10.21 (Παράδειγμα 10.13). Ομογενής στερεά ράβδος περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το O, υπό την επίδραση τής βαρύτητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10.14 Συνδεμένες μάζες

Θεωρήστε ότι δύο μάζες είναι συνδεδεμένες με ένα νήμα που είναι περασμένο πάνω από μια τροχαλία η οποία έχει ροπή αδράνειας I ως προς τον άξονα περιστροφής της (Σχήμα 10.22). Το νήμα δεν γλιστρά στην τροχαλία και το σύστημα αρχικά ηρεμεί. Βρείτε τις γραμμικές ταχύτητες τών μαζών όταν η μάζα m_2 πέσει προς τα κάτω διανύοντας απόσταση h, καθώς και την αντίστοιχη, στη στιγμή αυτή, γωνιακή ταχύτητα τής τροχαλίας.

Λύση Εάν δεν λάβουμε υπ' όψιν τις τριβές τού συστήματος, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα διατήρησης τής μηχανικής ενέργειας. Έτσι λοιπόν λέμε ότι η αύξηση τής κινητικής ενέργειας ισούται με τη μείωση τής δυναμικής. Επειδή το σύστημα αρχικά ηρεμεί ($K_i = 0$), έχουμε

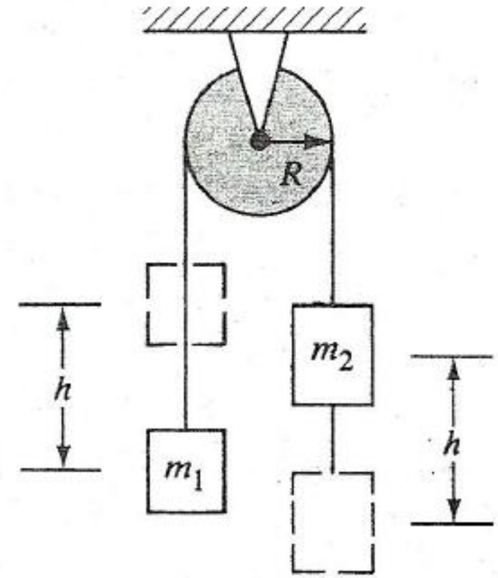
$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}m_1v^2 + \tfrac{1}{2}m_2v^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Ας μην ξεχάσουμε ότι η m_1 και η m_2 έχουν την ίδια ταχύτητα. Ξέρουμε επίσης ότι $v = R\omega$. Έτσι

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2$$

Από το Σχήμα 10.22 βλέπουμε ότι η m_2 χάνει δυναμική ενέργεια, ενώ η m_1 κερδίζει δυναμική ενέργεια. Δηλαδή $\Delta U_2 = -m_2gh$ και $\Delta U_1 = m_1gh$. Χρησιμοποιούμε τη διατήρηση τής ενέργειας με τη μορφή $\Delta K + \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$ και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + m_1gh - m_2gh = 0$$



Σχήμα 10.22 (Παράδειγμα 10.14).

$$v = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}\right)}\right]^{1/2}$$

Επειδή $v = R\omega$, για να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα τής τροχαλίας κατά την αντίστοιχη στιγμή διαιρούμε την παραπάνω έκφραση τής ταχύτητας με την ακτίνα τής τροχαλίας R. Και βρίσκουμε $\omega = v/R$.