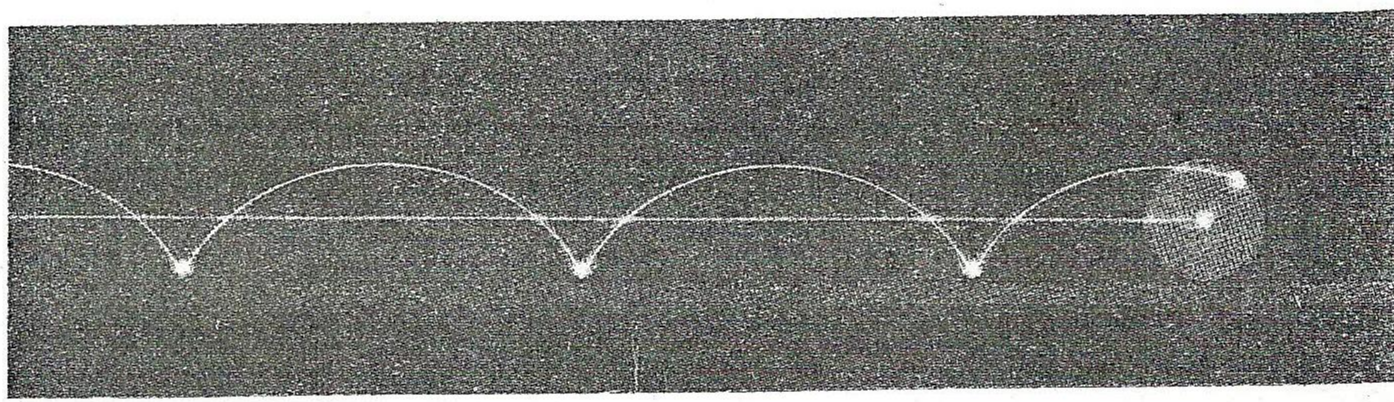
11 – Κύλιση, στροφορμή και ροπή

11.1 ΚΥΛΙΣΗ ΕΝΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από έναν κινούμενο άξονα. Η περιγραφή τής γενικής κίνησης ενός στερεού σώματος στον χώρο είναι πρόβλημα πολύπλοκο. Μπορούμε όμως να απλουστεύσουμε την μελέτη μας εάν περιοριστούμε σε ομογενή σώματα τα οποία έχουν συμμετρικό σχήμα, όπως είναι ένας κύλινδρος, μια σφαίρα ή ένα στεφάνι. Θα υποθέσουμε επί πλέον ότι το σώμα κυλίεται πάνω σε ένα επίπεδο.

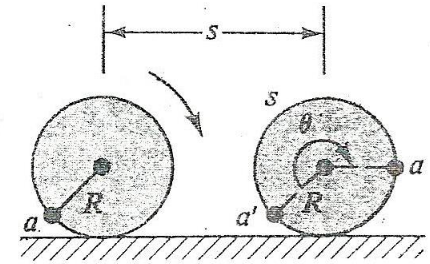
Υποθέστε ότι ένας κύλινδρος κινείται πάνω σε ευθύγραμμη διαδρομή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.1. Το κέντρο μάζας του διαγράφει ευθεία



Σχήμα 11.1 Τα λαμπάκια που έχουν προσαρμοστεί στην περιφέρεια και στο κέντρο ενός κυλιόμενου κυλίνδρου δείχνουν τις διαδρομές που διαγράφουν τα σημεία αυτά. Το κέντρο κινείται ευθύγραμμα. (Φωτογραφία Henry Leap και Jim Lehman).

γραμμή, ενώ ένα σημείο τής περιμέτρου τού κυλίνδρου διαγράφει πιο σύνθετη τροχιά, που αντιστοιχεί στην τροχιά μιας κυκλοειδούς. Όπως θα δούμε αργότερα στο κεφάλαιο αυτό, για διευκόλυνσή μας θα θεωρήσουμε την κίνηση αυτή ως σύνθεση τής περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας και τής γραμμικής μεταφοράς τού κέντρου μάζας.

Θεωρήστε τώρα ότι ένας ομογενής κύλινδρος, ακτίνας R, κυλίεται πάνω σε τραχιά οριζόντια επιφάνεια (Σχήμα 11.2). Καθώς ο κύλινδρος περιστρέφεται κατά γωνία θ, το κέντρο μάζας του μετατοπίζεται κατά $s = R\theta$. Επομένως, η ταχύτητα και η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας για *αμιγή κύλιση* ισούνται με



Σχήμα 11.2 Στην περίπτωση τής κύλισης, καθώς ο κύλινδρος περιστρέφεται κατά γωνία θ, το κέντρο τού κυλίνδρου μετατοπίζεται κατά απόσταση $s = R\theta$.

$$v_c = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{11.1}$$

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{11.2}$$

Οι γραμμικές ταχύτητες διαφόρων σημείων τού κυλίνδρου απεικονίζονται στο Σχήμα 11.3. Να σημειωθεί ότι η κατεύθυνση τής γραμμικής ταχύτητας κάθε σημείου είναι κάθετη προς τη γραμμή που τό ενώνει με το σημείο επαφής. Εάν δεν υπάρχει ολίσθηση, τότε το σημείο επαφής P ηρεμεί σε σχέση με την επιφάνεια.

Ένα τυχαίο σημείο πάνω στον κύλινδρο, λ.χ. το Q, έχει οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα τής ταχύτητας. Το σημείο όμως P και P' και το κέντρο μάζας απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Το κέντρο μάζας κινείται με ταχύτητα $v_c = R\omega$ σε σχέση με την επιφάνεια επάνω στην οποία κυλίεται ο κύλινδρος, ενώ η ταχύτητα τού P είναι μηδενική. Το σημείο P' έχει ταχύτητα ίση με $2v_c = 2R\omega$, επειδή όλα τα σημεία τού κυλίνδρου έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η ολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου κυλίνδρου είναι

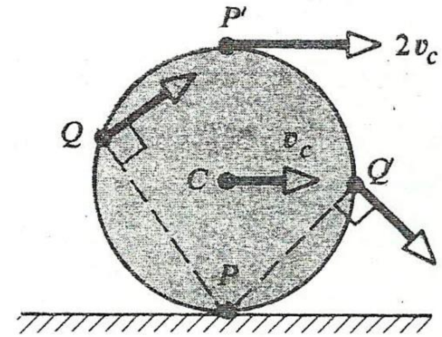
$$K = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad (11.3)$$

όπου I_p είναι η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο P. Εφαρμόζουμε το θεώρημα τών παράλληλων αξόνων και βρίσκουμε ότι $I_p = I_c + MR^2$. Θέτουμε το αποτέλεσμα αυτό στην εξίσωση 11.3 και έχουμε

$$K = \tfrac{1}{2} I_c \omega^2 + \tfrac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

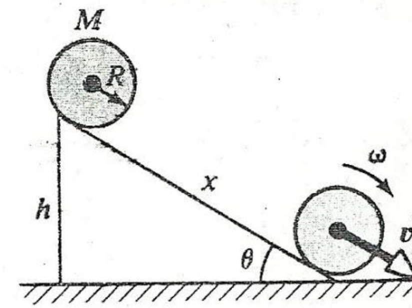
$$K = \tfrac{1}{2} I_c \omega^2 + \tfrac{1}{2} M {v_c}^2 \qquad (11.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή σχέση $v_c = R\omega$.



Σχήμα 11.3 Όλα τα σημεία ενός κυλιόμενου σώματος κινούνται σε κατεύθυνση κάθετη προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής P. Το κέντρο τού σώματος κινείται με ταχύτητα v_c, ενώ το σημείο P' κινείται με ταχύτητα $2v_c$.

Μπορούμε να σχολιάσουμε την Εξίσωση 11.4 ως εξής: Ο πρώτος όρος, $\frac{1}{2}I_c\omega^2$, περιγράφει την κινητική ενέργεια περιστροφής τού κυλίνδρου γύρω από το κέντρο μάζας του, ενώ ο όρος $\frac{1}{2}Mv_c{}^2$ αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια τού κυλίνδρου εάν αυτός πραγματοποιούσε μόνο μεταφορική κίνηση στον χώρο χωρίς περιστροφές. Λέμε λοιπόν ότι



Σχήμα 11.4 Σώμα κυκλικής διατομής κυλίεται προς τα κάτω. Η μηχανική ενέργεια διατηρείται εάν δεν υπάρχει ολίσθηση.

> ***η ολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος είναι το άθροισμα τής κινητικής ενέργειας περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας και τής κινητικής ενέργειας η οποία αντιστοιχεί στη μεταφορική κίνηση τού κέντρου μάζας.***

Μπορούμε πιο εύκολα να λύσουμε προβλήματα κύλισης σε τραχύ κεκλιμένο επίπεδο εάν χρησιμοποιήσουμε σχέσεις ενέργειας. Θα υποθέσουμε ότι το στερεό σώμα τού Σχήματος 11.4 δεν ολισθαίνει και ότι αρχικά ηρεμούσε στο επάνω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου. Δεν πρέπει να μάς διαφεύγει ότι για να υπάρξει κύλιση είναι απαραίτητη η ύπαρξη δύναμης τριβής ανάμεσα στο αντικείμενο και στο κεκλιμένο επίπεδο, διότι έτσι δημιουργείται η απαραίτητη ροπή γύρω από το κέντρο μάζας. Μολονότι όμως υπάρχει τριβή, δεν υπάρχουν απώλειες μηχανικής ενέργειας, διότι το σημείο επαφής, ανά πάσα στιγμή, είναι ακίνητο σε σχέση με το κεκλιμένο επίπεδο. Αλλά εάν το στερεό σώμα ολισθαίνει, προφανώς χάνει μηχανική ενέργεια λόγω τής τριβής.

Γνωρίζουμε ότι $v_c = R\omega$ προκειμένου για κύλιση. Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 11.4 ως

$$K = \tfrac{1}{2} I_c \left(\frac{v_c}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2} M {v_c}^2$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\frac{I_c}{R^2} + M\right){v_c}^2 \tag{11.5}$$

Όταν ο κυλιόμενος κύλινδρος φτάσει στο κάτω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου ύψους h, θα έχει χάσει δυναμική ενέργεια ίση προς Mgh. Εάν το σώμα αρχικά ηρεμούσε στο επάνω μέρος τού κεκλιμένου επιπέδου, η κινητική ενέργεια που θα έχει όταν φτάσει στο κάτω μέρος, όπως τήν δίνει η Εξίσωση 11.5, ισούται με τη δυναμική ενέργεια την οποία είχε το σώμα στην κορυφή. Εξισώνουμε τις δύο ποσότητες, λύνουμε ως προς v_c, την ταχύτητα τού κέντρου μάζας, και βρίσκουμε:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{I_c}{R^2} + M\right){v_c}^2 = Mgh$$

$$v_c = \left(\frac{2gh}{1 + I_c/MR^2}\right)^{1/2} \tag{11.6}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.1 Σφαίρα που κυλίεται προς το κάτω μέρος κεκλιμένου επιπέδου

Υποθέστε ότι το στερεό σώμα τού Σχήματος 11.4 είναι συμπαγής σφαίρα. Υπολογίστε την ταχύτητα τού κέντρου μάζας της όταν φτάνει στο κάτω μέρος· προσδιορίστε τη γραμμική επιτάχυνση τού κέντρου μάζας τής σφαίρας.

Λύση Γνωρίζουμε ότι, για συμπαγή ομογενή σφαίρα, $I_c = \frac{2}{5}MR^2$ Έτσι η Εξίσωση 11.6 δίνει

$$v_c = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}\frac{MR^2}{MR^2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{10}{7} gh \right)^{1/2}$$

Γνωρίζουμε από τη Στοιχειώδη Τριγωνομετρία ότι $h = x \sin\theta$. Αντικαθιστούμε και υψώνουμε τα δύο μέλη στο τετράγωνο και βρίσκουμε ότι

$$v_c{}^2 = \frac{10}{7} gx \sin\theta$$

εάν συγκρίνουμε τη σχέση αυτή με τη γνωστή μας από την Κινητική σχέση $v_c^2 = 2a_c x$, βρίσκουμε ότι η επιτάχυνση είναι

$$a_c = \tfrac{5}{7} g \sin\theta$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας είναι *ανεξάρτητες* από τη μάζα και την ακτίνα τής σφαίρας! Δηλαδή, *όλες οι ομογενείς συμπαγείς σφαίρες έχουν την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση σε ένα δεδομένο κεκλιμένο επίπεδο.* Βρίσκουμε παρόμοια αποτελέσματα εάν επαναλάβουμε τον παραπάνω υπολογισμό για τις περιπτώσεις *κοίλης* σφαίρας, συμπαγούς κυλίνδρου ή στεφανιού. Οι αριθμητικοί συντελεστές τών αποτελεσμάτων για v_c και a_c εξαρτώνται από την ροπή αδράνειας τού συγκεκριμένου σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του. Σε όλες τις περιπτώσεις όμως η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας είναι *μικρότερη* από το $g \sin\theta$, που θα ήταν η επιτάχυνση εάν το κεκλιμένο επίπεδο ήταν λείο και επομένως δεν υπήρχε κύλιση.

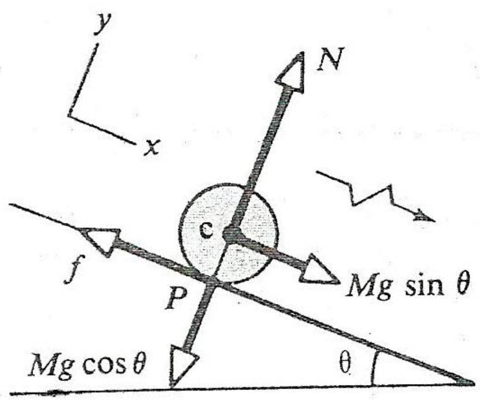
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.2 Δεύτερος τρόπος λύσης τού προβλήματος τής κυλιόμενης σφαίρας

Θα ξαναλύσουμε το πρόβλημα τού προηγούμενου παραδείγματος αλλά με τη χρησιμοποίηση δυνάμεων. Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος απεικονίζεται στο Σχήμα 11.5.

Λύση Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton στην κίνηση τού κέντρου μάζας και έχουμε

$$\text{(1)} \qquad \sum F_x = Mg\sin\theta - f = Ma_c$$

$$\sum F_y = N - Mg\cos\theta = 0$$



Σχήμα 11.5 (Παράδειγμα 11.2) Διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για την περίπτωση κυλιόμενης σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο.

όπου ο άξονας x είναι παράλληλος προς το κεκλιμένο επίπεδο και η θετική του κατεύθυνση είναι προς τα κάτω. Ας βρούμε τη σχέση που περιγράφει τη ροπή που δρα πάνω στην σφαίρα. Για διευκόλυνσή μας θα χρησιμοποιήσουμε έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο τού σχήματος ο οποίος διέρχεται από το κέντρο τής σφαίρας[1]. Επειδή το βάρος Mg και η κάθετη δύναμη N διέρχονται από το κέντρο μάζας, έχουν μηδενικό μοχλοβραχίονα και δεν συνεισφέρουν στη ροπή. Αλλά η δύναμη τής τριβής δημιουργεί ροπή γύρω από τον άξονα αυτό ίση με fR και με κατεύθυνση κατά τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού. Επομένως

$$\tau_c = fR = I_c \alpha$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι $I_c = \frac{2}{5}MR^2$ και $\alpha = a_c/R$. Έτσι

$$(2) \qquad f = \frac{I_c \alpha}{R} = \left(\frac{\frac{2}{5}MR^2}{R}\right)\frac{a_c}{R} = \frac{2}{5}Ma_c$$

$$a_c = \frac{5}{7} g \sin\theta$$

θέτουμε τη (2) στην (1) και βρίσκουμε αποτέλεσμα που συμπίπτει με το αποτέλεσμα τού Παραδείγματος 11.1. Ας σημειωθεί ότι το $a_c < g \sin\theta$ οφείλεται στην επιβραδύνουσα δύναμη τριβής.

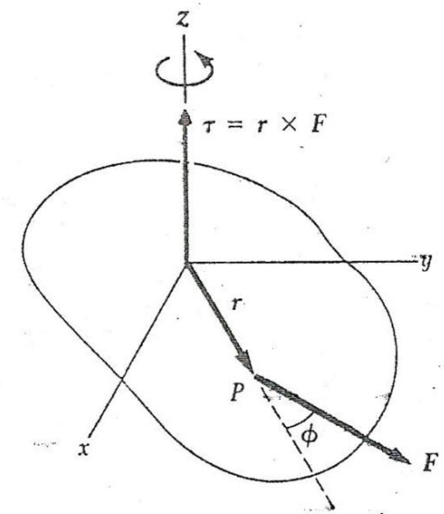
---

[1] Να σημειωθεί ότι, αν και το σύστημα κέντρου μάζας τού παραδείγματός μας δεν είναι αδρανειακό επειδή επιταχύνεται, η σχέση $\tau_c = I\alpha$ εξακολουθεί να ισχύει για το σύστημα κέντρου μάζας.

11.2 ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ Η ΡΟΠΗ

Θεωρήστε ότι μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ δρα πάνω σε ένα στερεό σώμα στο σημείο που έχει επιβατική ακτίνα $\boldsymbol{r}$ (Σχήμα 11.6). *Υποθέτουμε ότι το σύστημα συντεταγμένων που έχει την αρχή του στο O είναι αδρανειακό και, γι' αυτό, ισχύει ο δεύτερος νόμος τού Newton.* Γνωρίζουμε ότι εξ ορισμού *το μέτρο* τής ροπής την οποία ασκεί η δύναμη $\boldsymbol{F}$ σε σχέση με την αρχή τών συντεταγμένων ισούται με $rF \sin \phi$, όπου ϕ είναι η γωνία που περιέχεται από τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$. Ο άξονας γύρω από τον οποίον η $\boldsymbol{F}$ τείνει να περιστρέψει το σώμα είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$. Εάν η δύναμη κείται στο επίπεδο xy, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.6, τότε συμβολίζουμε τη ροπή $\boldsymbol{\tau}$ με ένα διάνυσμα παράλληλο προς τον άξονα τών z. Η δύναμη τού Σχήματος 11.6 δημιουργεί ροπή η οποία τείνει να περιστρέψει το σώμα σε φορά αντίθετη προς τη φορά τών δεικτών ρολογιού για έναν παρατηρητή που κοιτάζει παράλληλα προς την κατεύθυνση τού αρνητικού άξονα z. Έτσι, λοιπόν, η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{\tau}$ είναι προς τον θετικό άξονα z. Εάν μεταβάλουμε την κατεύθυνση τής $\boldsymbol{F}$ κατά 180°, τότε και η κατεύθυνση τού $\boldsymbol{\tau}$ θα μεταβληθεί κατά 180° και θα λάβει κατεύθυνση προς τον αρνητικό άξονα z. Η ροπή συνεπάγεται, για να οριστεί, δύο διανύσματα, $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$, και εξ ορισμού είναι ίση προς το *διανυσματικό γινόμενο*, το οποίο ορισμένες φορές λέγεται και *εξωτερικό γινόμενο* τών διανυσμάτων $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{11.7}$$



Σχήμα 11.6 Η κατεύθυνση τού διανύσματος τής ροπής $\boldsymbol{\tau}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η επιβατική ακτίνα $\boldsymbol{r}$ και η εφαρμοσμένη δύναμη $\boldsymbol{F}$.

Ας δώσουμε τώρα έναν αυστηρότερο ορισμό τού διανυσματικού γινομένου. Εάν έχουμε δύο διανύσματα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο τό συμβολίζουμε με $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ και ορίζουμε ότι είναι ίσο με ένα τρίτο διάνυσμα, $\boldsymbol{C}$, που έχει *μέτρο* $AB \sin \theta$, όπου θ είναι η γωνία που περιέχεται ανάμεσα στα διανύσματα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Έτσι γράφουμε ότι

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{11.8}$$

και το μέτρο του είναι

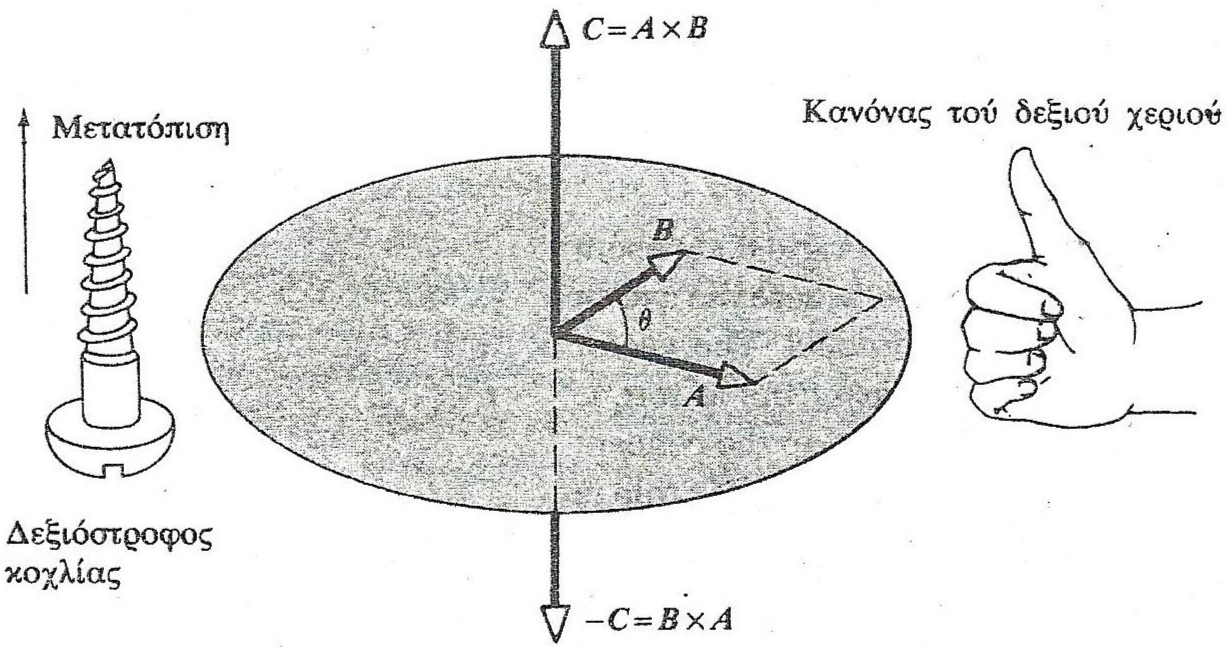
$$C \equiv |\boldsymbol{C}| = |AB \sin \theta| \tag{11.9}$$

Να σημειωθεί ότι η ποσότητα $AB \sin \theta$ ισούται με την επιφάνεια τού παραλληλογράμμου το οποίο σχηματίζουν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.7. Η *διεύθυνση* τού $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ είναι κάθετη στο επίπεδο το οποίο ορίζεται από τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ (βλ. Σχήμα 11.7) και η κατεύθυνσή της καθορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία, καθώς μετατοπίζεται στρεφόμενος από το $\boldsymbol{A}$ προς το $\boldsymbol{B}$ και σαρώνει τη γωνία θ. Είναι πιο εύκολο να βρούμε την κατεύθυνση τού $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα τού δεξιού χεριού όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 11.7. Χρησιμοποιούμε το δεξί μας χέρι έτσι ώστε τα τέσσερα δάκτυλα να δείχνουν προς την κατεύθυνση τού πρώτου από τα δύο πολλαπλασιαζόμενα μεταξύ τους διανύσματα, δηλαδή τού $\boldsymbol{A}$. Κατόπιν στρέφουμε τα δάκτυλά μας προς το $\boldsymbol{B}$ σαρώνοντας τη γωνία θ. Η κατεύθυνση τού αντίχειρα μας δείχνει την κατεύθυνση τού $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. Το $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ εκφέρεται και ως $\boldsymbol{A}$ «κρος» $\boldsymbol{B}$ και γι' αυτό, συχνά, το διανυσματικό γινόμενο λέγεται και γινόμενο *κρος*.

Μερικές από τις ιδιότητες τού διανυσματικού γινομένου οι οποίες απορρέουν από τον ορισμό του, είναι οι εξής:

1. Η σειρά με την οποία δύο διανύσματα πολλαπλασιάζονται για να βρούμε το διανυσματικό τους γινόμενο έχει σημασία (εν αντιθέσει προς το εσωτερικό γινόμενο), δηλαδή

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \tag{11.10}$$



Σχήμα 11.7 Το διανυσματικό γινόμενο $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ είναι ένα τρίτο διάνυσμα $\boldsymbol{C}$, μέτρου $AB \sin\theta$ (που ισούται με την επιφάνεια τού παραλληλογράμμου τού σχήματος). Η διεύθυνση τού $\boldsymbol{C}$ είναι κάθετη προς το επίπεδο που ορίζουν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ και η κατεύθυνσή του δίνεται από τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία.

Επομένως, εάν μεταβάλουμε τη σειρά τών παραγόντων τού διανυσματικού γινομένου πρέπει να αλλάξουμε το πρόσημο. Είναι ενδιαφέρον να τό επιβεβαιώσετε αυτό χρησιμοποιώντας τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία (Σχήμα 11.7).

2. Εάν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι παράλληλα (ή αντιπαράλληλα), τότε $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$. Επομένως, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$
3. Εάν τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετα, τότε $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB$
4. Είναι σημαντικό να θυμούμαστε ότι το διανυσματικό γινόμενο ακολουθεί τον *επιμεριστικό κανόνα*, δηλαδή

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{11.11}$$

5. Τέλος, η παράγωγος τού διανυσματικού γινομένου ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως λ.χ. τον χρόνο t, είναι

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \times \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \boldsymbol{B} \tag{11.12}$$

Είναι σημαντικό να τηρούμε τη σειρά τών παραγόντων τού γινομένου $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ (να μην ξεχνούμε, δηλαδή, την Εξίσωση 11.10).

Σάς δίνουμε ως άσκηση να χρησιμοποιήσετε τις εξισώσεις 11.8 και 11.9 και τον ορισμό τών μοναδιαίων διανυσμάτων για να αποδείξετε ότι για τα ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ και $\boldsymbol{k}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0 \tag{11.13a}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k} \tag{11.13b}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i} \tag{11.13c}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j} \tag{11.13d}$$

Τα πρόσημα μετατίθενται· λογουχάρη $\boldsymbol{i}\times(-\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{k}$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορίζουσες για να εκφράσουμε το διανυσματικό γινόμενο *οποιωνδήποτε* διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$.

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα και βρίσκουμε

$$A\times B=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k} \tag{11.14}$$