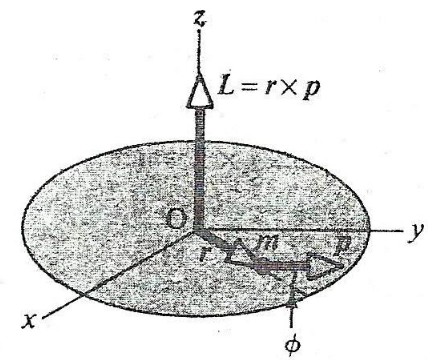
11.3 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ένα σώμα μάζας m έχει επιβατική ακτίνα $\mathbf{r}$ και κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ (Σχήμα 11.8).

Η *στιγμιαία στροφορμή* $\mathbf{L}$ τού σώματος ως προς την αρχή O εξ ορισμού είναι ίση με το διανυσματικό γινόμενο τής επιβατικής του ακτίνας $\mathbf{r}$ επί (προς!) την στιγμιαία γραμμική του ορμή $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{11.15}$$



Σχήμα 11.8 Η στροφορμή $\mathbf{L}$ ενός σώματος μάζας m και ορμής $\mathbf{p}$ που έχει επιβατική ακτίνα $\mathbf{r}$ είναι $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Η τιμή τού $\mathbf{L}$ εξαρτάται από την αρχή τών συντεταγμένων και είναι διάνυσμα κάθετο στο $\mathbf{r}$ και στο $\mathbf{p}$.

Οι μονάδες τής στροφορμής στο SI είναι kg·m^2/s. Μην ξεχάσετε ποτέ ότι το μέτρο και η κατεύθυνση τής στροφορμής εξαρτώνται από την αρχή τών συντεταγμένων ως προς την οποία υπολογίζουμε το $\mathbf{L}$. Η διεύθυνση τού $\mathbf{L}$ είναι κάθετη προς το επίπεδο που ορίζεται από τα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{p}$ και η κατεύθυνσή του δίνεται από τον κανόνα τού δεξιόστροφου κοχλία. Λογουχάρη, στο Σχήμα 11.8, τα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{p}$ κείνται στο επίπεδο xy, οπότε το $\mathbf{L}$ έχει την κατεύθυνση τού θετικού άξονα z. Επειδή $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, το μέτρο τού $\mathbf{L}$ είναι

$$L = mvr \sin \phi \tag{11.16}$$

όπου ϕ είναι η γωνία που περιέχεται ανάμεσα στα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{p}$. Προφανώς, το $\mathbf{L}$ είναι μηδενικό όταν η $\mathbf{p}$ είναι παράλληλη προς το $\mathbf{r}$ ($\phi = 0°$ ή $180°$). Με άλλα λόγια, όταν το σώμα κινείται επάνω σε ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από την αρχή τών συντεταγμένων έχει μηδενική στροφορμή ως προς αυτήν την αρχή ή, με άλλα λόγια, δεν τείνει να περιστραφεί προς το σημείο αυτό. Εάν όμως το $\mathbf{r}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{p}$ ($\phi = 90°$), τότε το μέτρο τού $\mathbf{L}$ έχει τη μέγιστη τιμή του και ισούται με mrv. Τότε, δηλαδή, το σώμα έχει τη μέγιστη τάση να περιστραφεί γύρω από την αρχή. Στην περίπτωση αυτή το σώμα κινείται σαν να βρισκόταν επάνω στην περίμετρο ενός τροχού ο οποίος περιστρέφεται γύρω από την αρχή στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{p}$.

΄Οταν μελετούσαμε τη γραμμική κίνηση ενός σώματος είχαμε δει ότι η συνισταμένη τών δυνάμεων που δρουν πάνω σε ένα σώμα ισούται με τον ως προς τον χρόνο ρυθμό μεταβολής τής γραμμικής ορμής. Θα αποδείξουμε τώρα ότι επακόλουθο τού δεύτερου νόμου τού Newton είναι ότι η ολική ροπή που υφίσταται ένα σώμα ισούται με τον ως προς τον χρόνο ρυθμό μεταβολής τής στροφορμής του. Γράφουμε, λοιπόν, τη ροπή πάνω σε ένα σώμα ως

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{11.17}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$. Ας παραγωγίσουμε τώρα την Εξίσωση 11.15 ως προς τον χρόνο και ας χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα τής Εξίσωσης 11.12.

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p}$$

Πρέπει να διατηρήσουμε τη σειρά τών παραγόντων, διότι $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

Ο τελευταίος όρος τής προηγούμενης εξίσωσης είναι μηδέν, διότι το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ είναι παράλληλο προς το $\boldsymbol{p}$. Επομένως

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{11.18}$$

Συγκρίνουμε τις εξισώσεις 11.17 και 11.18 και βρίσκουμε ότι

$$\tau = \frac{dL}{dt} \tag{11.19}$$

που είναι ο αντίστοιχος νόμος, για τις περιπτώσεις περιστροφής, τού δεύτερου νόμου τού Newton $F = dp/dt$. Αυτό το αποτέλεσμα ορίζει λοιπόν ότι

η *ροπή* που δρα πάνω σε ένα σώμα ισούται με τον ως προς τον χρόνο ρυθμό μεταβολής τής στροφορμής τού σώματος.

Πρέπει να σημειωθεί οπωσδήποτε ότι η Εξίσωση 11.19 ισχύει μόνον εάν η ροπή $\boldsymbol{\tau}$ και η στροφορμή $\boldsymbol{L}$ μετρώνται ως προς *το ίδιο σημείο*. Αφήνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει μόνος του ότι εάν υπάρχουν περισσότερες από μία δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω στο σώμα, η Εξίσωση 11.19 εξακολουθεί να ισχύει, αλλά το $\boldsymbol{\tau}$ είναι η συνισταμένη ροπή όλων τών δυνάμεων που δρουν πάνω στο σώμα. *Επί πλέον, η σχέση αυτή ισχύει για κάθε αρχή συντεταγμένων η οποία είναι σταθερή σε ένα σύστημα αναφοράς.* Είναι προφανές ότι πρέπει και εδώ να υπολογίζουμε όλες τις ροπές και την στροφορμή ως προς το ίδιο σημείο.

Ένα σύστημα σωμάτων

Η ολική στροφορμή $\boldsymbol{L}$ ενός συστήματος σωμάτων ως προς κάποιο σημείο ισούται με το διανυσματικό άθροισμα τών στροφορμών καθενός από τα σώματα:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \cdots + \boldsymbol{L}_n = \sum \boldsymbol{L}_i$$

όπου το διανυσματικό άθροισμα περιλαμβάνει όλα τα n σώματα τού συστήματος.

Εάν οι επιμέρους ορμές τών σωμάτων μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο, τότε και η ολική στροφορμή θα μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο. Από τις εξισώσεις 11.17 έως 11.18 βρίσκουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής τής ολικής στροφορμής ισούται με το διανυσματικό άθροισμα *όλων* τών ροπών, δηλαδή τών ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις, καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις ανάμεσα στα σώματα τού συστήματος. Η ολική ροπή όμως τών εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Για να καταλάβουμε καλύτερα αυτό το σημείο ας θυμηθούμε τον τρίτο νόμο τού Newton, που μάς λέει ότι οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη, στα οποία οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και ότι κείνται επάνω στη γραμμή που ενώνει τα ζεύγη τών σωμάτων. Επομένως, η ροπή κάθε ζεύγους δράσης-αντίδρασης είναι μηδενική. Εάν κάνουμε την άθροιση, βλέπουμε ότι *η ολική εσωτερική ροπή είναι μηδενική*. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η ολική στροφορμή μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου *μόνο* όταν δρα επάνω στο σύστημα μη μηδενική *εξωτερική* ροπή. Έτσι έχουμε

$$\sum \tau_{ext} = \sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum L_i = \frac{dL}{dt} \tag{11.20}$$

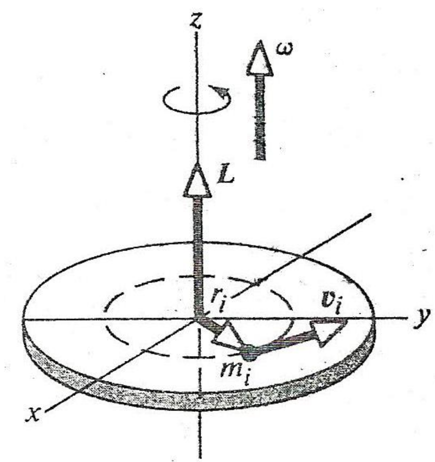
Δηλαδή

ο ρυθμός μεταβολής, ως προς τον χρόνο, τής ολικής στροφορμής ενός συστήματος σωμάτων, όταν μετριέται ως προς κάποιο σημείο ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ισούται με τη συνισταμένη εξωτερική ροπή η οποία δρα επάνω στο σύστημα σωμάτων, όταν αυτή μετριέται ως προς το ίδιο σημείο.

Ας σημειωθεί ότι η Εξίσωση 11.20 είναι το ανάλογο, ως προς την περιστροφή, τής σχέσης $\boldsymbol{F}_{ext} = d\boldsymbol{p}/dt$ για ένα σύστημα σωμάτων (Κεφάλαιο 9).

11.4 ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΕΝΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΞΟΝΑ

Ας θεωρήσουμε ότι ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα ο οποίος έχει σταθερή κατεύθυνση. Υποθέτουμε ότι ο άξονας αυτός συμπίπτει με τον άξονα z, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.11. Καθένα από τα πολλά μέρη ή επιμέρους σώματα που συναπαρτίζουν το στερεό σώμα περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω. Το μέτρο τής στροφορμής τού σώματος i, μάζας m_i, είναι $m_i v_i r_i$ ως προς την αρχή τών συντεταγμένων O. Γνωρίζουμε ότι $v_i = \omega r_i$. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το μέτρο τής στροφορμής τού σώματος i ως



Σχήμα 11.11 Όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα, η στροφορμή $\boldsymbol{L}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, διότι $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

$$L_i = m_i r_i^2 \, \omega$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{L_i}$ κατευθύνεται παράλληλα με τον θετικό άξονα z, όπως και το $\boldsymbol{\omega}$.

Ας βρούμε τώρα τη συνιστώσα z τής στροφορμής τού στερεού σώματος αθροίζοντας το L_i πάνω σε όλα τα επιμέρους σώματα που συναπαρτίζουν το στερεό σώμα:

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \, \omega = \left(\sum m_i r_i^2\right) \omega$$

ή

$$L_z = I\omega \qquad (11.21)$$

όπου L_z είναι η συνιστώσα z τής στροφορμής και I είναι η ροπή αδράνειας τού στερεού σώματος ως προς τον άξονα τών z.

Ας παραγωγίσουμε τώρα ως προς τον χρόνο την Εξίσωση 11.21, χωρίς να μάς διαφεύγει ότι η I είναι σταθερή για ένα στερεό σώμα:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \tag{11.22}$$

όπου α είναι η γωνιακή επιτάχυνση σε σχέση με τον άξονα περιστροφής. Ξέρουμε όμως ότι το γινόμενο $I\alpha$ είναι ίσο προς τη συνισταμένη ροπή (βλ. Εξίσωση 11.20). Έτσι ξαναγράφουμε την Εξίσωση 11.22 ως

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha \tag{11.23}$$

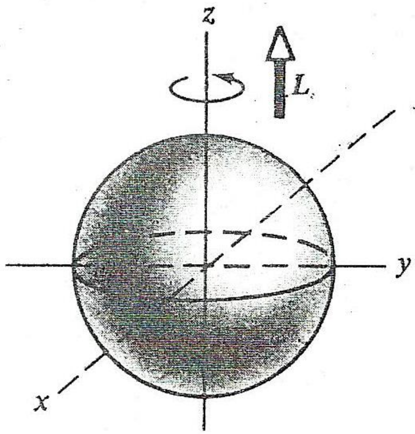
Με άλλα λόγια, η συνισταμένη ροπή τών εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο τής ροπής αδράνειας, υπολογιζόμενης ως προς τον άξονα περιστροφής, επί την ως προς τον άξονα περιστροφής υπολογιζόμενη γωνιακή επιτάχυνση.

Ας σημειωθεί ότι εάν ένα συμμετρικό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση 11.21 με μορφή διανυσμάτων, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, όπου $\mathbf{L}$ είναι η ολική στροφορμή τού σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γενικευθεί για οποιοδήποτε σώμα, ανεξάρτητα από την συμμετρία του, εάν αντί για την ολική $\mathbf{L}$ βάλουμε την συνιστώσα τής $\mathbf{L}$ επάνω στον άξονα περιστροφής[2].

(2) Η σχέση $L = I\omega$ δεν ισχύει γενικά. Ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από έναν τυχαίο άξονα δεν έχει τα L και ω συγγραμμικά, τα οποία, γενικά, έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Μάλιστα, στην περίπτωση αυτή η ροπή αδράνειας δεν είναι πια μονόμετρο μέγεθος. Η εξίσωση $L = I\omega$ ισχύει μόνο για στερεά σώματα, τυχαίου σχήματος, τα οποία περιστρέφονται γύρω από έναν από τους λεγόμενους *κύριους άξονες αδράνειας*, οι οποίοι διέρχονται από το κέντρο μάζας και είναι τρεις και κάθετοι μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.6 Περιστρεφόμενη σφαίρα

Μια ομογενής συμπαγής σφαίρα ακτίνας $R = 0.50$ m και μάζας 15 kg περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.12. Βρείτε τη στροφορμή της όταν η γωνιακή ταχύτητά της είναι 3 rad/s.



Σχήμα 11.12 (Παράδειγμα 11.6). Μια σφαίρα που περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της κατά τη φορά που φαίνεται στο σχήμα έχει στροφορμή L που κατευθύνεται προς τη θετική κατεύθυνση τού άξονα z. Εάν αντιστραφεί η φορά περιστροφής, τότε η στροφορμή L θα κατευθύνεται προς τον αρνητικό άξονα z.

Λύση Η ροπή αδράνειας τής σφαίρας γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της είναι

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(15\ \text{kg})(0.5\ \text{m})^2 = 1.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Επομένως, το μέτρο τής στροφορμής είναι

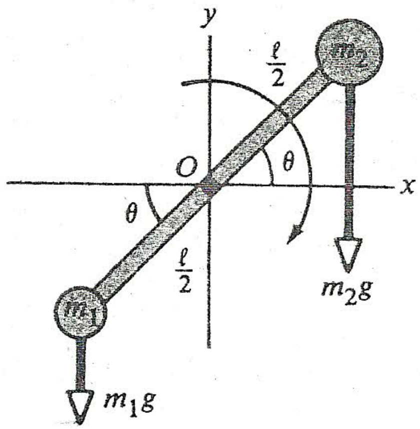
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.7 Περιστρεφόμενη ράβδος

Μια συμπαγής ράβδος μάζας M και μήκους ℓ περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της (Σχήμα 11.13). Στα δύο άκρα τής ράβδου έχουν στερεωθεί δύο σώματα μάζας m_1 και m_2, αντίστοιχα: (a) Προσδιορίστε τη στροφορμή της όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω.

Λύση Η ροπή αδράνειας τού συστήματος ισούται με το άθροισμα τών ροπών αδράνειας τών τριών διαφορετικών μερών τα οποία απαρτίζουν το σύστημα: τής ράβδου, τής m_1 και τής m_2. Χρησιμοποιούμε τους Πίνακες 10.2 και βρίσκουμε ότι η ολική ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα z ο οποίος διέρχεται από το O είναι

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$$

Επομένως, όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω, η στροφορμή είναι



Σχήμα 11.13 (Παράδειγμα 11.7) Γενικά, για ένα σύστημα με $m_1 \neq m_2$, το οποίο περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, υπάρχει ροπή που δημιουργεί γωνιακή επιτάχυνση σύμφωνα με το $\tau_{net} = I\alpha$.

$$L = I\omega = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega$$

(b) Υπολογίστε τη γωνιακή επιτάχυνση τού συστήματος όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο.

Η ροπή την οποία ασκεί το βάρος m_1g γύρω από τον άξονα είναι

(κατεύθυνση προς τα έξω τού επιπέδου)

$$\tau_1 = m_1 g \frac{\ell}{2} \cos\theta$$

Η ροπή την οποία ασκεί το βάρος m_2g γύρω από τον άξονα είναι

$$\tau_2 = -m_2 g \frac{\ell}{2} \cos\theta \quad \text{(κατεύθυνση προς το επίπεδο)}$$

Επομένως, η συνισταμένη ροπή ως προς το O είναι

$$\tau_{net} = \tau_1 + \tau_2 = \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)g\ell \cos\theta$$

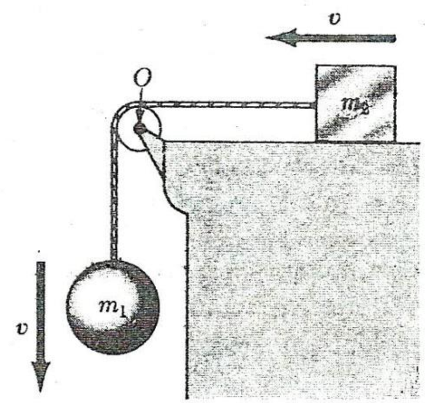
Ας σημειωθεί ότι η συνισταμένη ροπή τ_{net}, κατευθύνεται *έξω* από το επίπεδο εάν $m_1 > m_2$ και *προς* το επίπεδο εάν $m_1 < m_2$. Για να βρούμε το α χρησιμοποιούμε τη $\tau_{net} = I\alpha$, όπου αντικαθιστούμε την I που βρήκαμε παραπάνω. Έτσι

$$\alpha = \frac{\tau_{net}}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\theta}{\ell\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)}$$

Ας σημειωθεί ότι το α είναι μηδέν όταν θ είναι $\pi/2$ ή $-\pi/2$ (κατακόρυφη θέση) και το α είναι μέγιστο όταν το θ είναι 0 ή π (οριζόντια θέση). Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι επειδή το α μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου, η γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος δεν είναι σταθερή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.8 Δύο συνδεδεμένες μάζες

Δύο μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με ένα ελαφρό νήμα το οποίο περνά πάνω από μια τροχαλία ακτίνας R και ροπής αδράνειας I ως προς τον άξονά της, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.14. Η μάζα m_2 ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Προσδιορίστε την επιτάχυνση τών δύο μαζών χρησιμοποιώντας τις έννοιες τής στροφορμής και τής ροπής.



Σχήμα 11.14 (Παράδειγμα 11.8).

Λύση Ας υπολογίσουμε την στροφορμή τού συστήματος, το οποίο αποτελείται από τις δύο μάζες και από την τροχαλία, γύρω από τον άξονα τής τροχαλίας ο οποίος διέρχεται από το O. Την στιγμή που οι μάζες έχουν ταχύτητα v, η στροφορμή τής m_1 είναι m_1vR και τής m_2 είναι m_2vR. Την ίδια στιγμή η στροφορμή τής τροχαλίας είναι $I\omega = Iv/R$. Έτσι η ολική στροφορμή τού συστήματος είναι

$$(1) \qquad L = m_1vR + m_2vR + I\frac{v}{R}$$

Ας υπολογίσουμε την ολική εξωτερική ροπή που υφίσταται το σύστημα ως προς τον άξονα τής τροχαλίας ο οποίος διέρχεται από το O. Η δύναμη την οποία ασκεί ο άξονας πάνω στην τροχαλία έχει μηδενικό μοχλοβραχίονα και έτσι δεν συνεισφέρει στη ροπή. Η κάθετη δύναμη που δρά πάνω στο m_2 εξισορροπείται από το βάρος του και έτσι δεν συνεισφέρει στη ροπή. Το βάρος τού m_1 είναι m_1g και παράγει γύρω από τον άξονα ροπή με μέτρο m_1gR, όπου R είναι ο μοχλοβραχίονας τής δύναμης ως προς τον άξονα. Αλλά αυτή είναι και η ολική εξωτερική ροπή ως προς το O, δηλαδή $\tau_{\text{ext}} = m_1gR$. Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 11.23, στην οποία αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση, καθώς και την (1)

$$\tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1gR = \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)Rv + I\frac{v}{R}\right]$$

ή

$$(2) \qquad m_1gR = (m_1 + m_2)R\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R}\frac{dv}{dt}$$

Αλλά $dv/dt = a$. Λύνουμε λοιπόν προς a και έχουμε

$$a = \frac{m_1g}{(m_1 + m_2) + I/R^2}$$

Εάν αναρωτιέστε γιατί δεν λάβαμε υπ' όψιν τις δυνάμεις τάσης τού νήματος κατά τον υπολογισμό τής ολικής ροπής ως προς τον άξονα, η απάντηση είναι ότι οι δυνάμεις τάσης είναι *εσωτερικές* στο εξεταζόμενο σύστημα. Μόνο *εξωτερικές* δυνάμεις συνεισφέρουν στη μεταβολή τής στροφορμής.

11.5 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Στο Κεφάλαιο 9 βρήκαμε ότι η ολική γραμμική ορμή ενός συστήματος σωμάτων παραμένει σταθερή (διατηρείται) όταν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη που δρα πάνω στο σώμα είναι μηδενική. Έχουμε έναν ανάλογο νόμο διατήρησης στην περιστροφική κίνηση, σύμφωνα με τον οποίο *η ολική στροφορμή ενός συστήματος είναι σταθερή εάν η συνισταμένη εξωτερική ροπή η οποία δρα πάνω στο σύστημα είναι μηδενική.* Αυτό είναι άμεσο αποτέλεσμα τής Εξίσωσης 11.20, όπου βλέπουμε ότι, εάν

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \qquad (11.24)$$

τότε

$$\boldsymbol{L} = \text{ σταθερή} \qquad (11.25)$$

Για ένα σύστημα σωμάτων γράφουμε τον νόμο αυτό ως $\Sigma \boldsymbol{L}_i$ = σταθερή (constant). Εάν γίνει ανακατανομή τής μάζας ενός σώματος (από εσωτερικές δυνάμεις), τότε είναι προφανές ότι μεταβάλλεται η ροπή αδράνειάς του και γράφουμε τον νόμο διατήρησης τής στροφορμής ως

$$L_i = L_f = \text{σταθερή} \qquad (11.26)$$

Εάν το σύστημα είναι ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, λ.χ. τον z, τότε μπορούμε να γράψουμε για την συνιστώσα z τού $\boldsymbol{L}$ ότι $L_z = I\omega$, όπου I είναι η ροπή αδράνειας τού σώματος ως προς τον z. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε τον νόμο διατήρησης τής στροφορμής ως

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{σταθερή} \tag{11.27}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για τις περιπτώσεις περιστροφής γύρω από σταθερό άξονα ή γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τού συστήματος και παραμένει παράλληλος προς την αρχική του κατεύθυνση. Απαιτείται μόνον να είναι μηδενική η εξωτερική ροπή. Μολονότι δεν αποδεικνύεται εδώ, υπάρχει για τη στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας ένα σημαντικό θεώρημα σύμφωνα με το οποίο

η συνισταμένη ροπή που ασκείται πάνω σε ένα σώμα, ως προς το κέντρο μάζας του, ισούται με τον, ως προς τον χρόνο, ρυθμό μεταβολής τής στροφορμής του, ανεξάρτητα από την κίνηση τού κέντρου μάζας.

Το θεώρημα αυτό ισχύει έστω και αν το κέντρο μάζας επιταχύνεται, αρκεί τα τ και $\boldsymbol{L}$ να υπολογίζονται ως προς το κέντρο μάζας.