ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Υποκεφάλαιο 11.1 Κύλιση στερεού σώματος

1. Ένας κύλινδρος μάζας 10 kg κυλά χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε μια τραχιά επιφάνεια. Κατά τη χρονική στιγμή που το κέντρο μάζας του έχει ταχύτητα 10 m/s, προσδιορίστε: (a) την κινητική ενέργεια, λόγω μεταφοράς τού κέντρου μάζας του· (b) την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας του· και (c) την ολική κινητική ενέργειά του.

2. Μια στερεά σφαίρα έχει ακτίνα 0.2 m και μάζα 150 kg. Πόσο έργο απαιτείται για να κυλά η σφαίρα με γωνιακή ταχύτητα 50 rad/s πάνω σε οριζόντια επιφάνεια; (Υποθέστε ότι η σφαίρα ξεκινά, ενώ προηγουμένως ήταν ακίνητη, και κυλά χωρίς να ολισθαίνει).

3. (a) Προσδιορίστε την επιτάχυνση τού κέντρου μάζας ενός ομογενούς στερεού δίσκου που κυλά προς τα κάτω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο και συγκρίνετε την επιτάχυνση αυτή με την επιτάχυνση μιας ομογενούς στεφάνης. (b) Ποιος είναι ο ελάχιστος συντελεστής τριβής που απαιτείται ώστε να παραμένει η κίνηση τού δίσκου αμιγής κύληση;

4. Ένας ομογενής στερεός δίσκος και μια ομογενής στεφάνη τοποθετούνται πλάι - πλάι στην κορυφή ενός τραχιού κεκλιμένου επιπέδου ύψους h. Αν αφεθούν ελεύθερα, ενώ ήταν ακίνητα, και κυλήσουν χωρίς να ολισθαίνουν, προσδιορίστε τις ταχύτητές τους όταν θα φτάσουν στη βάση τού κεκλιμένου επιπέδου. Ποιο σώμα θα φτάσει στη βάση πρώτο;

5. Το κέντρο μάζας ενός ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R κινείται με ταχύτητα v πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Ο κύλινδρος κυλά χωρίς να ολισθαίνει. Βρείτε την ολική κινητική ενέργεια τού κυλίνδρου ως προς ένα σύστημα αναφοράς ακίνητο στην οριζόντια επιφάνεια.

6. Τα κέντρα μάζας ενός στερεού κυλίνδρου και μιας στερεάς σφαίρας που το καθένα έχει μάζα M και ακτίνα R κινούνται με ταχύτητα v σε σχέση με το έδαφος. Βρείτε τον λόγο τών ολικών κινητικών ενεργειών τους.

Υποκεφάλαιο 11.2 Το διανυσματικό γινόμενο και η ροπή

7. Δύο διανύσματα είναι $\mathbf{A} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ και $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Βρείτε (a) το $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ και (b) τη γωνία μεταξύ τών $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$.

8. Βρείτε το $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ για τα διανύσματα (a) $\mathbf{A} = 3\mathbf{j}$ και $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ και $\mathbf{B} = 4\mathbf{k}$, (c) $\mathbf{A}$ $3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{B} = -2\mathbf{i}$.

9. Το διάνυσμα $\mathbf{A}$ έχει κατεύθυνση κατά τον αρνητι άξονα y και το διάνυσμα $\mathbf{B}$ κατά τον αρνητικό άξο x. Ποιες είναι οι κατευθύνσεις τών (a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ και ($\mathbf{B} \times \mathbf{A}$;

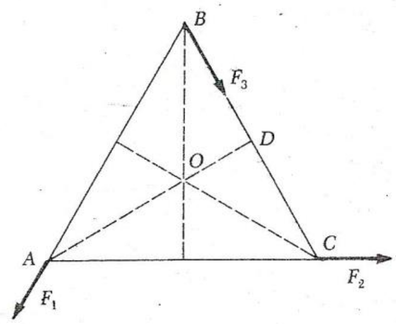
10. Ένα σώμα βρίσκεται στο σημείο που έχει διάνυσ θέσης $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ m και η δύναμη που ασκείται αυτό είναι $\mathbf{F} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ N. Ποια είναι η ροπή προς (a) την αρχή τών συντεταγμένων και (b) σημείο που έχει συντεταγμένες (0,6) m;

11. Αν $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, ποιά είναι η γωνία μεταξύ τών και $\mathbf{B}$;

12. Επαληθεύσετε την Εξίσωση 11.14 για το διανυσματι κό γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και και αποδείξτε ότι το διανυσματικό γινόμενο μπορ να γραφεί σε μορφή ορίζουσας ως ακολούθως:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

13. Δύο δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ δρουν κατά μήκος τών δύ πλευρών ενός ισόπλευρου τριγώνου, όπως φαίνετα στο Σχήμα 11.23. Βρείτε μια τρίτη δύναμη $\mathbf{F}_3$ πο πρέπει να ασκηθεί στο B και κατά μήκος τής B τέτοια ώστε να κάνει τη συνισταμένη ροπή ως προς τ σημείο τομής τών υψών μηδενική. Η συνισταμέν ροπή θα μεταβληθεί αν η $\mathbf{F}_3$ ασκηθεί όχι στο B, αλλ σε ένα άλλο τυχαίο σημείο κατά μήκος τής BC;

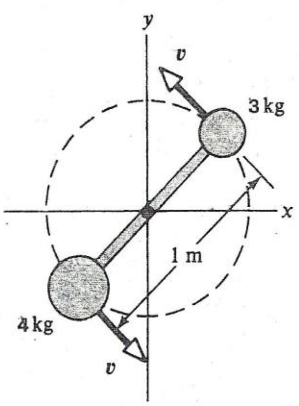


Σχήμα 11.23 (Πρόβλημα 13).

14. Ένα σώμα βρίσκεται σε ένα σημείο με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r} = (4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j})$ m και η δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι $\boldsymbol{F} = (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$ N. (a) Ποια είναι η ροπή που ενεργεί στο σώμα ως προς την αρχή τών συντεταγμένων; (b) Προσδιορίστε ένα σημείο στον άξονα y ως προς το οποίο η ροπή θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την (a) και μέτρο το μισό.

Υποκεφάλαιο 11.3 Στροφορμή ενός σώματος

15. Μια ελαφρά άκαμπτη ράβδος μήκους 1 m περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το μέσο τής ράβδου. Δύο σώματα μαζών 4 kg και 3 kg συνδέονται στα άκρα της (βλ. Σχήμα 11.24). Προσδιορίστε τη στροφορμή τού συστήματος ως προς την αρχή τών συντεταγμένων κατά τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα καθενός σώματος είναι 5 m/s.

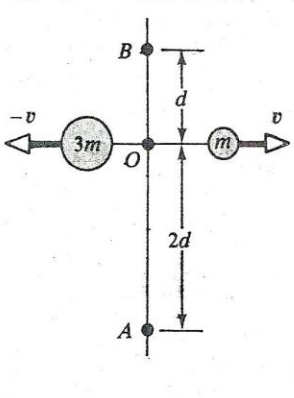


Σχήμα 11.24 (Πρόβλημα 15).

16. Ένα σώμα μάζας 0.3 kg κινείται στο επίπεδο xy. Τη στιγμή που οι συντεταγμένες του είναι (2, 4) m, η ταχύτητά του είναι $(3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$ m/s. Αυτή τη στιγμή, προσδιορίστε τη στροφορμή τού σώματος ως προς την αρχή τών συντεταγμένων.

17. Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας 2 kg σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι $\boldsymbol{r} = (6\boldsymbol{i} + 5t\boldsymbol{j})$ m. Προσδιορίστε τη στροφορμή τού σώματος ως συνάρτηση τού χρόνου.

18. Δύο σφαίρες κινούνται σε *αντίθετες* κατευθύνσεις κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής (βλ. Σχήμα 11.25).



Σχήμα 11.25 (Πρόβλημα 18).

Η σφαίρα μάζας m κινείται προς τα δεξιά με μέτρο ταχύτητας v, ενώ η σφαίρα μάζας 3 m κινείται προς τα αριστερά με μέτρο ταχύτητας v. Ποια είναι η *ολική* στροφορμή τού συστήματος ως προς (a) το σημείο A, (b) το σημείο O και (c) το σημείο B;

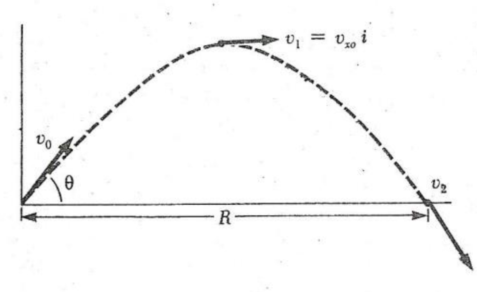
19. Ένα σώμα μάζας m κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα $v = v\boldsymbol{j}$ κατά μήκος τού θετικού άξονα y. Προσδιορίστε τη στροφορμή τού σώματος (μέτρο και κατεύθυνση) ως προς (a) το σημείο που έχει συντεταγμένες $(-d, 0)$· (b) το σημείο που έχει συντεταγμένες $(2d, 0)$ και (c) την αρχή τών συντεταγμένων.

20. Ένα αεροπλάνο μάζας 12 000 kg πετά παράλληλα προς το έδαφος σε ύψος 10 km με σταθερή ταχύτητα 175 m/s σε σχέση με τη Γη. (a) Ποιο είναι το μέτρο τής στροφορμής τού αεροπλάνου ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος ακριβώς κάτω από το αεροπλάνο; (b) Αυτή η τιμή μεταβάλλεται καθώς το αεροπλάνο εξακολουθεί να κινείται ευθύγραμμα;

21. (a) Υπολογίστε τη στροφορμή τής Γης που οφείλεται στην περιστροφή της γύρω από τον άξονά της. (b) Υπολογίστε τη στροφορμή τής Γης που οφείλεται στην περιφορά της γύρω από τον Ήλιο και συγκρίνετε την τιμή αυτή με την (a). (Η απόσταση Γης - Ηλίου ισούται με 1.49×10^{11} m).

22. Μια μάζα 4 kg είναι δεμένη σε ένα ελαφρό νήμα που είναι τυλιγμένο γύρω από μια τροχαλία (βλ. Σχήμα 10.18). Η τροχαλία είναι ένας ομογενής στερεός κύλινδρος ακτίνας 8 cm και μάζας 2 kg. (a) Ποια είναι η συνισταμένη ροπή τού συστήματος ως προς το σημείο O; (b) Όταν η μάζα τών 4 kg έχει ταχύτητα v, η τροχαλία έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = v/R$. Προσδιορίστε τη συνισταμένη στροφορμή τού συστήματος ως προς το O. (c) Με δεδομένα ότι $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$ και το αποτέλεσμά σας από το (b), υπολογίστε την επιτάχυνση τής μάζας τών 4 kg.

23. Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ που κάνει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.26. Το σώμα κινείται στο βαρυτικό πεδίο τής Γης. Βρείτε τη στροφορμή τού σώματος ως προς την αρχή τών συντεταγμένων όταν το σώμα βρίσκεται: (a) στην αρχή τών συντεταγμένων, (b) στο ψηλότερο σημείο τής τροχιάς του και (c) στο σημείο ακριβώς προτού προσκρούσει στο έδαφος. (d) Ποια ροπή προκαλεί μεταβολές τής στροφορμής του;



Σχήμα 11.26 (Πρόβλημα 23)

Υποκεφάλαιο 11.4 Περιστροφή ενός στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα

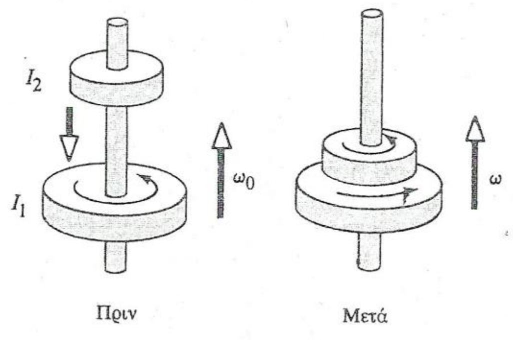
24. Ένας ομογενής στερεός δίσκος μάζας 3 kg και ακτίνας 0.2 m περιστρέφεται γύρω από έναν ακίνητο άξονα κάθετο στην επιφάνειά του. Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι 6 rad/s, υπολογίστε τη στροφορμή τού δίσκου όταν ο άξονας περιστροφής: (a) διέρχεται από το κέντρο μάζας του και (b) διέρχεται από το μέσο μιας ακτίνας.

25. Ένα σώμα μάζας 0.4 kg είναι δεμένο στο άκρο ενός ξύλινου χάρακα μήκους 100 cm και μάζας 0.1 kg. Ο χάρακας περιστρέφεται πάνω σε ένα οριζόντιο λείο τραπέζι με γωνιακή ταχύτητα 4 rad/s. Υπολογίστε τη στροφορμή τού συστήματος αν ο χάρακας είναι στερεωμένος γύρω από έναν άξονα (a) που είναι κάθετος στο τραπέζι και διέρχεται από το σημείο με ένδειξη 50 cm· και (b) που είναι κάθετος στο τραπέζι και διέρχεται από το σημείο με ένδειξη 0 cm.

26. Δύο μάζες M και m που συνδέονται με μια άκαμπτη ράβδο αμελητέας μάζας βρίσκονται πάνω σε μια οριζόντια λεία επιφάνεια. Πού πρέπει να ασκηθεί μια δύναμη κάθετη στη ράβδο έτσι ώστε οι μάζες να μην περιστραφούν γύρω από το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη;

Υποκεφάλαιο 11.5 Διατήρηση τής στροφορμής

27. Ένας κύλινδρος με ροπή αδράνειας I_1 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβή. Ένας δεύτερος κύλινδρος, με ροπή αδράνειας I_2 που αρχικά δεν περιστρέφεται πέφτει πάνω στον πρώτο κύλινδρο (βλ. Σχήμα 11.27). Επειδή οι επιφάνειες είναι τραχιές, οι δύο κύλινδροι αποκτούν τελικά την ίδια γωνιακή ταχύτηα ω. (a) Υπολογίστε την ω. (b) Αποδείξτε ότι στην περίπτωση αυτή υπάρχει απώλεια ενέργειας και υπολογίστε τον λόγο τής τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια.



Σχήμα 11.27 (Πρόβλημα 27).

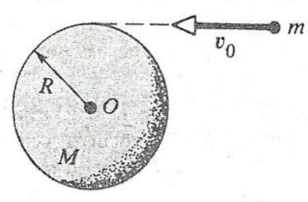
28. Ένας ομογενής στερεός κύλινδρος μάζας 2 kg και ακτίνας 25 cm περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο ακίνητο άξονα χωρίς τριβή με γωνιακή ταχύτητα 10 rad/s. Ένα κομμάτι στόκος μάζας 0.5 kg πέφτει κατακόρυφα πάνω στον κύλινδρο σε ένα σημείο 15 cm μακριά από τον άξονα. Αν ο στόκος κολλήσει στον κύλινδρο, υπολογίστε την τελική γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος. (Υποθέστε ότι το κομμάτι τού στόκου είναι σημειακή μάζα).

29. Μια γυναίκα μάζας 60 kg στέκεται στην περιφέρεια ενός στρογγυλού οριζόντιου τραπεζιού που έχει ροπή αδράνειας 500 kg · m^2 και ακτίνα 2 m. Το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο και το στρογγυλό τραπέζι είναι ελεύθερο να περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβή που διέρχεται από το κέντρο του. Κάποια στιγμή η γυναίκα αρχίζει να βαδίζει γύρω στην περιφέρεια με φορά σύμφωνη με τους δείκτες τού ρολογιού (κοιτάζοντας προς τα κάτω) και με σταθερή ταχύτητα 1.5 m/s ως προς τη Γη. (a) Κατά ποια φορά και με ποια γωνιακή ταχύτητα περιστρέφεται το τραπέζι; (b) Πόσο έργο παράγει η γυναίκα για να θέσει σε κίνηση το σύστημα;

30. Μια ομογενής ράβδος μάζας 100 g και μήκους 50 cm περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από έναν ακίνητο κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβή που διέρχεται από το μέσον της. Δυό μικρές χάντρες μάζας 30 g η καθεμιά είναι τοποθετημένες στη ράβδο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να ολισθαίνουν χωρίς τριβή κατά μήκος της. Αρχικά οι χάντρες συγκρατούνται με ασφάλειες σε θέσεις που απέχουν 10 cm από το μέσον, η μια δεξιά και η άλλη αριστερά του. Το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 20 rad/s. Ξαφνικά, οι ασφάλειες σπάνε και οι χάντρες ολισθαίνουν προς τα έξω κατά μήκος τής ράβδου. Βρείτε (a) τη γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος τη στιγμή κατά την οποία οι χάντρες φτάνουν στα άκρα τής ράβδου και (b) τη γωνιακή ταχύτητα τής ράβδου όταν οι χάντρες φύγουν από τα άκρα τής ράβδου.

31. Ο σπουδαστής τού Σχήματος 11.17 κρατά δύο βάρη, που το καθένα έχει μάζα 10 kg. Όταν τα χέρια είναι σε έκταση οριζόντια, τα βάρη απέχουν 1 m από τον άξονα περιστροφής και το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 2 rad/s. Η ροπή αδράνειας τού σπουδαστή συν το κάθισμα είναι 8 kg · m^2 και θεωρείται σταθερή. Αν ο σπουδαστής συμπτύξει τα χέρια του οριζόντια, έτσι ώστε, τα βάρη να απέχουν 0.25 m από τον άξονα περιστροφής, υπολογίστε (a) την τελική γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος και (b) τη μεταβολή τής μηχανικής ενέργειας τού συστήματος.

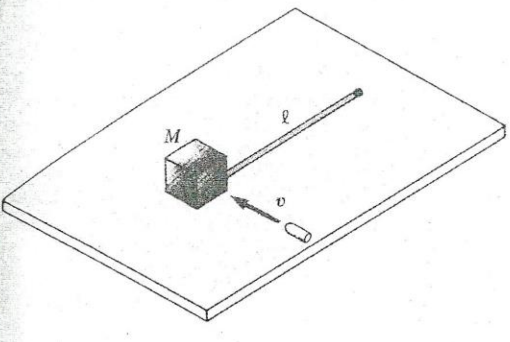
32. Ένα σώμα μάζας $m = 10$ g και ταχύτητας $v_0 = 5$ m/s συγκρούεται και κολλά στην εξωτερική επιφάνεια μιας ομογενούς στερεάς σφαίρας μάζας $M = 1$ kg και ακτίνας $R = 20$ cm (βλ. Σχήμα 11.28). Αν η σφαίρα είναι αρχικά ακίνητη και είναι στερεωμένη σε έναν άξονα χωρίς τριβή που διέρχεται από το O και είναι κάθετος στο επίπεδο τής σελίδας τού βιβλίου (a) βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα τού συστήματος μετά από την κρούση και (b) προσδιορίστε πόση ενέργεια χάθηκε κατά την κρούση.



Σχήμα 11.28 (Πρόβλημα 32)

33. Ένα ξύλινο σώμα μάζας M βρίσκεται πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια και είναι προσαρμοσμένο σε μια άκαμπτη ράβδο μήκους ℓ και αμελητέας μάζας (βλ. Σχήμα 11.29). Η ράβδος είναι στερεωμένη σταθερά στο άλλο άκρο. Μια σφαίρα όπλου μάζας m που κινείται παράλληλα προς την οριζόντια επιφάνεια και κάθετα προς τη ράβδο με ταχύτητα v χτυπάει το ξύλινο σώμα και ενσωματώνεται σε αυτό.

(a) Ποια είναι η στροφορμή τού συστήματος σφαίρα - σώμα; (b) Ποιο κλάσμα τής αρχικής κινητικής ενέργειας χάθηκε κατά την κρούση;



Σχήμα 11.29 (Προβλήματα 33 και 34).

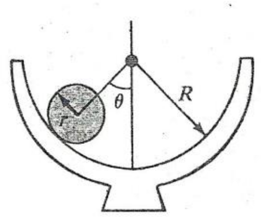
34. Θεωρήστε το προηγούμενο πρόβλημα με $l = 2$ m, $M = 2$ kg, $m = 10$ g και $v = 200$ m/s. Σε αυτή την περίπτωση η σφαίρα διαπερνά το σώμα και εξέρχεται με ταχύτητα $v = 25$ m/s παράλληλα προς την επιφάνεια. (a) Προσδιορίστε τη στροφορμή τού σώματος ακριβώς τη στιγμή που η σφαίρα εξέρχεται από το σώμα. (b) Προσδιορίστε την κινητική ενέργεια που χάθηκε σε αυτήν την κρούση. Παραλείψετε τον χρόνο που πέρασε όταν η σφαίρα διαπερνούσε το σώμα.

*** Υποκεφάλαιο 11.7 Η θεμελιώδης σημασία τής στροφορμής.**

35. Κατά τη θεωρία τού Bohr για το άτομο τού υδρογόνου, το ηλεκτρόνιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας 0.529×10^{-10} m γύρω από το πρωτόνιο. Εάν υποτεθεί ότι η τροχιακή στροφορμή τού ηλεκτρονίου είναι ίση με $\hbar$, υπολογίστε (a) την τροχιακή ταχύτητα τού ηλεκτρονίου, (b) την κινητική ενέργεια τού ηλεκτρονίου και (c) τη γωνιακή συχνότητα τής κίνησης τού ηλεκτρονίου.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

36. Μια ομογενής στερεά σφαίρα ακτίνας r τοποθετείται στην εσωτερική επιφάνεια ενός ημισφαιρικού κυπέλλου ακτίνας R. Η σφαίρα αφήνεται, ενώ ήταν ακίνητη από μια θέση που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο και κυλά χωρίς να ολισθαίνει (βλ. Σχήμα 11.30). Προσδιορίστε τη γωνιακή ταχύτητα τής σφαίρας όταν φτάνει στο χαμηλότερο σημείο τού κυπέλλου.

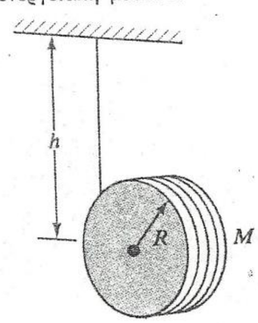


Σχήμα 11.30 (Πρόβλημα 36).

37. (a) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια τής Γης που οφείλεται στην ετήσια κινησή της γύρω από τον Ήλιο. (b) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια περιστροφής τής Γης που οφείλεται στην ημερήσια περιστροφή της γύρω από τον άξονά της. (c) Υπολογίστε τον λόγο $K_{\text{τροχιακη}}/K_{\text{περιστροφης}}$.

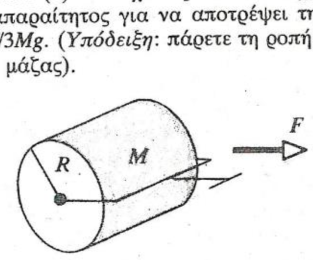
38. Ένα λεπτό ομογενές τραπέζι έχει κυλινδρικό σχήμα και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του χωρίς τριβή. Η ακτίνα τού τραπεζιού είναι ίση με 2 m, η μάζα του 30 kg. Το τραπέζι αρχικά περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, με αρχική γωνιακή ταχύτητα 4π rad/s. Σε μια στιγμή, ένα μικρό κομμάτι πηλού μάζας 0.25 kg πέφτει πάνω στο τραπέζι και κολλά σε ένα σημείο που απέχει 1.8 m από το κέντρο περιστροφής. (a) Βρείτε την τελική γωνιακή ταχύτητα τού πηλού και τού τραπεζιού (θεωρήστε το κομμάτι τού πηλού ως σημειακή μάζα). (b) Διατηρείται η μηχανική ενέργεια σε αυτή την κρούση; Εξηγήστε και χρησιμοποιήστε αριθμητικά αποτελέσματα για να επαληθεύσετε την απάντησή σας.

39. Ένας σπάγγος είναι τυλιγμένος γύρω από έναν ομογενή δίσκο ακτίνας R και μάζας M. Ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος ενώ ακινητούσε με τον σπάγγο κατακόρυφο και το ένα άκρο του δεμένο σε ένα σταθερό υποστήριγμα (βλ. Σχήμα 11.31). Καθώς ο δίσκος κατέρχεται, αποδείξτε ότι: (a) η τάση τού σπάγγου είναι το ένα τρίτο τού βάρους τού δίσκου· (b) η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας είναι $2\,g/3$· και (c) η ταχύτητα τού κέντρου μάζας είναι $(4gh/3)^{1/2}$. Επαληθεύσετε την απάντησή σας στο (c) χρησιμοποιώντας ενεργειακή μέθοδο.



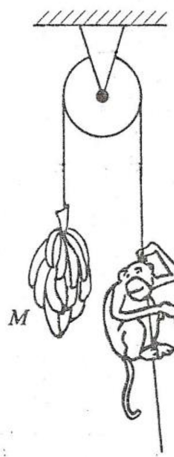
Σχήμα 11.31 (Πρόβλημα 39).

40. Μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\mathbf{F}$ ασκείται σε μια μηχανή κουρέματος χόρτου που έχει σχήμα ενός ομογενούς στερεού κυλίνδρου ακτίνας R και μάζας M (βλ. Σχήμα 11.32). Αν ο κύλινδρος κυλά χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια, αποδείξτε ότι: (a) η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας είναι $2F/3M$ και (b) ο ελάχιστος συντελεστής τριβής που είναι απαραίτητος για να αποτρέψει την ολίσθηση είναι $F/3Mg$. (*Υπόδειξη*: πάρετε τη ροπή ως προς το κέντρο μάζας).



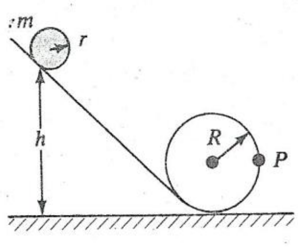
Σχήμα 11.32 (Πρόβλημα 40).

41. Ένα ελαφρό σχοινί περνάει από μια ελαφριά τροχαλία χωρίς τριβή. Στο ένα άκρο τού σχοινιού είναι δεμένο ένα τσαμπί με μπανάνες μάζας M και στο άλλο άκρο τού σχοινιού είναι γατζωμένος ένας πίθηκος μάζας M. (βλ. Σχήμα 11.33). Ο πίθηκος αρχίζει να σκαρφαλώνει στο σχοινί προσπαθώντας να φτάσει τις μπανάνες. (a) Θεωρήστε το σύστημα που αποτελείται από τον πίθηκο, τις μπανάνες, το σχοινί και την τροχαλία. Υπολογίστε τη συνισταμένη ροπή ως προς τον άξονα τής τροχαλίας. (b) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα τού (a) προσδιορίστε την ολική στροφορμή ως προς τον άξονα τής τροχαλίας και περιγράψτε την κίνηση τού συστήματος. Θα φτάσει ο πίθηκος τις μπανάνες;



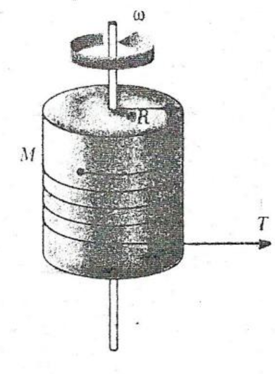
Σχήμα 11.33 (Πρόβλημα 41).

42. Μια μικρή στερεά σφαίρα μάζας m και ακτίνας r κυλά χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος τής τροχιάς που δείχνει το Σχήμα 11.34. Αν η σφαίρα ξεκινά ενώ ήταν ακίνητη στην κορυφή τής τροχιάς σε ύψος h, όπου το h είναι μεγάλο σε σύγκριση με το r: (a) ποια είναι η ελάχιστη τιμή τού h (σε συνάρτηση με την ακτίνα τής τροχιάς ανακύκλωσης R) έτσι ώστε η σφαίρα να συμπληρώσει την ανακύκλωση; (b) Ποιες είναι οι συνιστώσες τής δύναμης στη σφαίρα στο σημείο P αν $h = 3R$;



Σχήμα 11.34 (Πρόβλημα 42).

43. Ένα αβαρές νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από έναν ομογενή στερεό κύλινδρο (βλ. Σχήμα 11.35) που έχει μάζα $M = 15$ kg και ακτίνα $R = 6$ cm. Ο κύλινδρος είναι ελεύθερος να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του χωρίς τριβή. Το ένα άκρο τού νήματος είναι δεμένο στον κύλινδρο και το ελεύθερο άκρο σύρεται εφαπτομενικά με μια δύναμη που διατηρεί μια σταθερή τάση τού νήματος ίση με 2 N. (a) ποιά είναι η γωνιακή επιταχυνση α τού κυλίνδρου; (b) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα ω τού κυλίνδρου μετά από 2 s αφότου ασκήθηκε η δύναμη, αν ο κύλινδρος ήταν αρχικά ακίνητος;



Σχήμα 11.35 (Πρόβλημα 43).

44. Θεωρήστε τo πρόβλημα τής στερεάς σφαίρας που κυλά προς τα κάτω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, όπως περιγράφηκε στο Παράδειγμα 11.1. (a) Πάρετε ως άξονα για την εξίσωση τών ροπών τον στιγμιαίο άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής P και αποδείξτε ότι η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας είναι $a_c = \frac{5}{7} g \sin\theta$ (b) Αποδείξτε ότι ο *ελάχιστος* συντελεστής τριβής έτσι ώστε η σφαίρα να κυλά χωρίς να ολισθαίνει είναι $\mu_{\text{ελάχ.}} = \frac{2}{7}\tan\theta$.

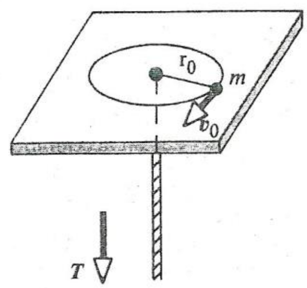
45. Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας 5 kg είναι $\boldsymbol{r} = (2t^2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ m, όπου το t είναι σε δευτερόλεπτα. Προσδιορίστε τη στροφορμή και τη ροπή που ενεργεί στο σώμα ως προς την αρχή τών συντεταγμένων.

46. Ένα σώμα μάζας m κείται σε σημείο με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$ και έχει γραμμική ορμή $\boldsymbol{p}$. (a) Αν τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{p}$ έχουν και τα δύο συνιστώσες x, y και z διαφορετικές από μηδέν, δείξτε ότι η στροφορμή τού σώματος ως προς την αρχή έχει συνιστώσες $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$ και $L_z = xp_y - yp_x$. (b) Αν το σώμα κινείται μόνο στο επίπεδο xy, αποδείξτε ότι $L_x = L_y = 0$ και $L_z \neq 0$.

47. Μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ δρα στο σώμα που περιγράφηκε στο Πρόβλημα 46. (a) Βρείτε τις συνιστώσες τής ροπής που ενεργεί στο σώμα ως προς την αρχή τών συντεταγμένων όταν το σώμα κείται στη θέση $\boldsymbol{r}$ και η δύναμη έχει τρεις συνιστώσες. (b) Από το αποτέλεσμα αυτό, αποδείξτε ότι αν το σώμα κινείται στο επίπεδο xy και η δύναμη έχει μόνο συνιστώσες x και y, η ροπή (και η στροφορμή) πρέπει να έχουν διεύθυνση στον άξονα z.

48. Έχει προταθεί για την αύξηση τής ισχύος ενός επιβατικού λεωφορείου η χρήση ενός συμπαγούς περιστρεφόμενου σφονδύλου, ο οποίος περιοδικά στρέφεται με τη μέγιστη ταχύτητά του (3 500 στροφές/min) με τη βοήθεια ενός ηλεκτρικού κινητήρα. Ο σφόνδυλος έχει μάζα 1 200 kg, διάμετρο 1.8 m και το σχήμα του είναι ίδιο με έναν συμπαγή κύλινδρο. (Αυτό δεν είναι αποδοτικό σχήμα για έναν σφόνδυλο προορισμένο να αυξάνει την ισχύ ενός αυτοκινήτου: Μπορείτε να πείτε γιατί;) (a) Ποια είναι η μέγιστη ποσότητα κινητικής ενέργειας που μπορεί να αποθηκευθεί στον σφόνδυλο; (b) Αν το λεωφορείο χρειάζεται μια μέση ισχύ 30 hp, πόσο χρόνο θα πρέπει να περιστρέφεται ο σφόνδυλος;

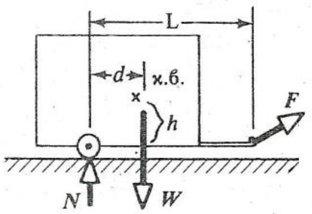
49. Μια μάζα m είναι δεμένη σε έναν σπάγγο που περνάει μέσα από μια μικρή τρύπα και βρίσκεται πάνω σε οριζόντια λεία επιφάνεια (βλ. Σχήμα 11.36). Η μάζα αρχικά περιστρέφεται σε έναν κύκλο ακτίνας r_0 με ταχύτητα v_0. Ο σπάγγος αρχίζει να τραβιέται αργά από κάτω ελαττώνοντας την ακτίνα τού κύκλου σε r. (a) Ποια είναι η ταχύτητα τής μάζας όταν η ακτίνα είναι r; (b) Βρείτε την τάση τού σπάγγου ως συνάρτηση τού r. (c) Πόσο έργο έχει παραχθεί κατά την κίνηση τής μάζας m από την ακτίνα r_0 στην r; (*Σημειώστε:* η τάση εξαρτάται από το r). (d) Βρείτε αριθμητικές τιμές για τα v, T και W όταν $r = 0.1$ m, αν $m = 50$ g, $r_0 = 0.3$ m και $v_0 = 1.5$ m/s.



Σχήμα 11.36 (Πρόβλημα 49).

50. Σε μια μπάλλα τού μπόουλινγκ στο έδαφος δίνεται μια αρχική ταχύτητα v_0 έτσι ώστε αυτή *αρχικά να ολισθαίνει χωρίς να κυλά.* Ο συντελεστής τριβής μεταξύ τής μπάλλας και τού εδάφους είναι μ. Αποδείξτε ότι στον χρόνο κατά τον οποίο συντελείται *αμιγής κύληση* (a) η ταχύτητα τού κέντρου μάζας τής μπάλλας είναι $5v_0/7$ και (b) η απόσταση που θα έχει διανύσει η μπάλλα είναι $12v_0^2/49\,\mu g$. (*Υπόδειξη:* όταν αρχίσει αμιγής κύλιση, $v_c = R\omega$ και $\alpha = a_c/R$. Αφού η δύναμη τριβής προκαλεί την επιβράδυνση, από τον δεύτερο νόμο τού Newton συνεπάγεται ότι $a_c = -\mu g$).

51. Ένα τροχόσπιτο συνολικού βάρους $\boldsymbol{W}$ σύρεται από ένα αυτοκίνητο με μια δύναμη $\boldsymbol{F}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.37. Το τροχόσπιτο είναι φορτωμένο έτσι ώστε το κέντρο βάρους του να βρίσκεται στη θέση που δείχνει το σχήμα. Αγνοείστε τη τριβή κυλίσεως και υποθέστε ότι το τροχόσπιτο έχει επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$. (a) Βρείτε την κατακόρυφη συνιστώσα τής $\boldsymbol{F}$ σε συνάρτηση με τις δεδομένες παραμέτρους. (b) Αν $a = 2$ m/s^2 και $h = 1.5$ m, ποια πρέπει να είναι η τιμή τής απόσταση d έτσι ώστε $F_y = 0$ (δεν υπάρχει κατακόρυφο φορτίο στο αυτοκίνητο). (c) Βρείτε τις τιμές τών F_x και F_y, δεδομένου ότι $W = 1500$ N, $d = 0.8$ m, $L = 3$ m, $h = 1.5$ m και $a = -2$ m/s^2.



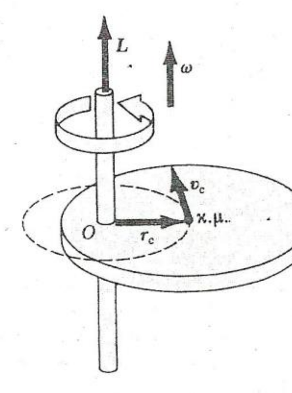
Σχήμα 11.37 (Πρόβλημα 51).

52. (a) Μια λεπτή ράβδος μήκους h και μάζας M συγκρατείται κατακόρυφα προς τα επάνω ενώ το κάτω άκρο της ακουμπά πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβή. Μετά, η ράβδος αφήνεται να πέσει ελεύθερη. Προσδιορίστε την ταχύτητα τού κέντρου μάζας ακριβώς προτού χτυπήσει στην οριζόντια επιφάνεια. (b) Υποθέστε ότι η ράβδος στηρίζεται στο κάτω άκρο της. Προσδιορίστε την ταχύτητα τού κέντρου μάζας της ακριβώς προτού χτυπήσει στην επιφάνεια.

53. Ένας ομογενής στερεός δίσκος μάζας M περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα παράλληλο προς τον άξονα συμμετρίας του που διέρχεται από το κέντρο του, όπως στο Σχήμα 11.38. Αποδείξτε ότι η στροφορμή τού δίσκου είναι

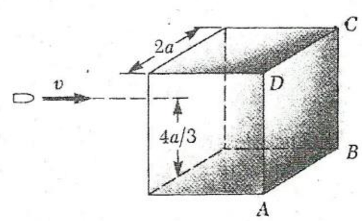
$$L = I_c\omega + r_c \times Mv_c$$

όπου I_c είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, r_c είναι το διάνυσμα από το O στο κέντρο μάζας και v_c είναι η ταχύτητα τού κέντρου μάζας. Ο πρώτος όρος τού δεξιού μέλους αυτής τής έκφρασης ονομάζεται *εσωτερική στροφορμή* (*spin*) γιατί αναφέρεται στο μέρος εκείνο τής στροφορμής που σχετίζεται με την περιστροφή τού συστήματος ως προς το κέντρο μάζας. Ο δεύτερος όρος τού δεξιού μέλους συνήθως αναφέρεται ως *τροχιακή στροφορμή.* (*Υπόδειξη:* χρησιμοποιήστε το θεώρημα τών παράλληλων αξόνων).



Σχήμα 11.38 (Πρόβλημα 53).

54. Ένας συμπαγής ξύλινος κύβος πλευράς $2a$ και μάζας M βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Ο κύβος είναι στερεωμένος έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από την ακμή AB (βλ. Σχήμα 11.39). Μια σφαίρα



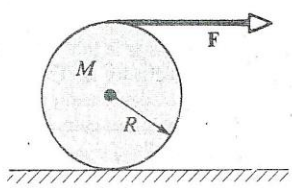
Σχήμα 11.39 (Πρόβλημα 54).

μάζας m και ταχύτητας v εκτοξεύεται εναντίον τής έδρας που είναι απέναντι τής $ABCD$ σε ύψος $4a/3$. Η σφαίρα ενσωματώνεται στον ξύλινο κύβο. Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα τής v που απαιτείται για να ανατρέψει τον κύβο και να πέσει στην έδρα τού $ABCD$. Υποθέστε ότι $m \ll M$.

55. Ένας αστέρας νετρονίων είναι ένα σύνολο νετρονίων που συγκρατούνται μεταξύ τους λόγω τής βαρυτικής έλξης τους. Η πυκνότητα ενός τέτοιου αστέρα είναι συγκρίσιμη με την πυκνότητα ενός ατομικού πυρήνα (10^{17} kg/m^3). Εάν υποτεθεί ότι ο αστέρας νετρονίων έχει σφαιρικό σχήμα και σταθερή πυκνότητα μάζας, αποδείξτε ότι η μέγιστη συχνότητα με την οποία μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς να αποσπάται μάζα από τον ισημερινό, είναι $\omega = (4\pi\varrho G/3)^{1/2}$, όπου ϱ είναι η πυκνότητα μάζας. Υπολογίστε την ω για $\varrho = 10^{17}$ kg/m^3. Προσδιορίστε την κινητική ενέργεια ενός τέτοιου άστρου ως προς τον άξονα περιστροφής του. Η ακτίνα τού αστέρα είναι 10 km.

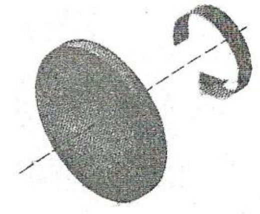
56. Μια συμπαγής σφαίρα αφήνεται ελεύθερη από ύψος h στην κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Υπολογίστε την ταχύτητα τής σφαίρας όταν φτάσει στη βάση τού κεκλιμένου επιπέδου στην περίπτωση κατά την οποία (a) κυλά χωρίς να ολισθαίνει· και (b) ολισθαίνει χωρίς τριβή και δεν κυλά. Συγκρίνετε τους χρόνους που χρειάζονται για να φτάσει η σφαίρα στη βάση τού κεκλιμένου επίπεδου στις περιπτώσεις (a) και (b).

57. Ένα πηνίο σύρματος με μάζα M και με ακτίνα R ξετυλίγεται υπό την επίδραση μιας σταθερής δύναμης $\boldsymbol{F}$ (βλ. Σχήμα 11.40). Εάν υποτεθεί ότι το πηνίο είναι ένας ομογενής στερεός κύλινδρος που *δεν ολισθαίνει*, αποδείξτε ότι (a) η επιτάχυνση τού κέντρου μάζας είναι $4\boldsymbol{F}/3M$ και (b) η δύναμη τριβής είναι προς τα *δεξιά* και ίση με $\boldsymbol{F}/3$. (c) Αν ο κύλινδρος ξεκινάει, ενώ ώς τότε ακινητούσε, και κυλά χωρίς να ολισθαίνει, ποια θα είναι η ταχύτητα τού κέντρου μάζας του αφού έχει κυλήσει κατά μια απόσταση d; (Υποθέστε ότι η δύναμη παραμένει σταθερή).



Σχήμα 11.40 (Πρόβλημα 57).

58. Ένας ομογενής συμπαγής δίσκος τίθεται σε περιστροφή γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Ο περιστρεφόμενος δίσκος χαμηλώνεται και αφήνεται με αυτή τη γωνιακή ταχύτητα πάνω σε μια *τραχιά* οριζόντια επιφάνεια (βλ. Σχήμα 11.41). (a) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα τού δίσκου όταν συντελείται αμιγής κύληση; (b) Βρείτε το κλάσμα τής κινητικής ενέργειας που χάθηκε από τη χρονική στιγμή που ο δίσκος αφέθηκε ελεύθερος μέχρι τη στιγμή που άρχισε η αμιγής κύληση (*Υπόδειξη:* η στροφορμή ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής διατηρείται).

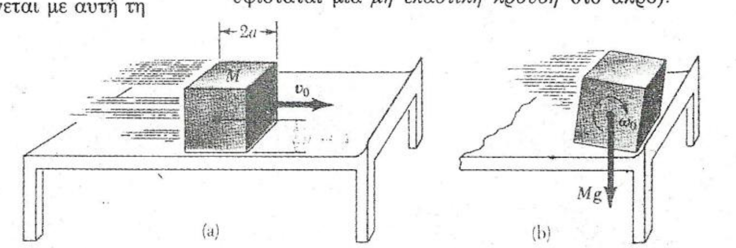


Σχήμα 11.41 (Προβλήματα 58 και 59).

59. Υποθέστε ότι σε έναν συμπαγή δίσκο ακτίνας R δίνεται γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και μετά χαμηλώνεται και αφήνεται ελεύθερος πάνω σε μια τραχιά, οριζόντια επιφάνεια, όπως στο Πρόβλημα 58 (βλ. Σχήμα 11.41). Επί πλέον, υποθέστε ότι ο συντελεστής τριβής μεταξύ τού δίσκου και τής επιφάνειας είναι μ. (a) Αποδείξτε ότι ο *χρόνος που απαιτείται για να αρχίσει αμιγής κύλιση είναι* $R\omega_0/3\mu g$. (b) Αποδείξτε ότι η *απόσταση* που θα διατρέξει ο δίσκος προτού αρχίσει η αμιγής κύλιση είναι $R^2\omega_0^2/18\ \mu g$ (βλ. υπόδειξη τού προβλήματος 58).

60. Ένα μεγάλο κυλινδρικό ρολό λεπτού χαρτιού αρχικής ακτίνας R βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια μεγάλου μήκους με το εξωτερικό άκρο τού χαρτιού στερεωμένο στην επιφάνεια ώστε να μπορεί να ξετυλίγεται εύκολα. Σπρώχνουμε *ελαφρά* ($v_0 \approx 0$) το ρολό, που αρχίζει να ξετυλίγεται. (a) Προσδιορίστε την ταχύτητα τού κέντρου μάζας τού ρολού όταν η ακτίνα του ελαττωθεί σε r. (b) Υπολογίστε την αριθμητική τιμή για την ταχύτητα αυτή όταν $r = 1$ mm, εάν υποτεθεί ότι $R = 6$ m. (c) Τί συμβαίνει στην ενέργεια τού συστήματος όταν το χαρτί έχει ξετυλιχθεί τελείως; (*Υπόδειξη:* υποθέστε ότι το ρολό έχει σταθερή πυκνότητα και εφαρμόστε ενεργειακές μεθόδους).

61. Ένας στερεός κύβος ακμής $2a$ και μάζας M γλιστράει σε μια λεία επιφάνεια με σταθερή ταχύτητα v_0, όπως στο Σχήμα 11.42a. Στη συνέχεια χτυπά σε ένα μικρό εμπόδιο στην άκρη τού τραπεζιού, που κάνει τον κύβο να γείρει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.42b. Βρείτε την ελάχιστη τιμή τής v_0 έτσι ώστε ο κύβος να πέσει κάτω από το τραπέζι. Σημειώστε ότι η ροπή αδράνειας τού κύβου ως προς έναν άξονα κατά μήκος μιας ακμής του είναι $8Ma^2/3$. (*Υπόδειξη:* ο κύβος υφίσταται μια *μη ελαστική κρούση* στο άκρο).



Σχήμα 11.42 (Πρόβλημα 61).