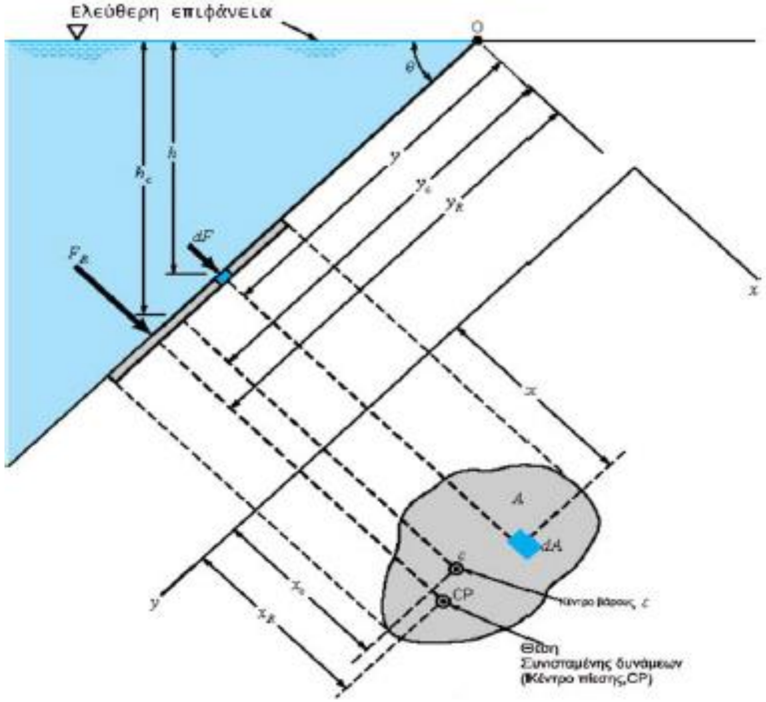
ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ



- Υπολογισμός της δύναμης (μέγεθος,διεύθυνση,σημείο εφαρμογής)
- Για δεδομένο h η δύναμη που ασκείται σε dA είναι dF=γhdA
- Η συνολική δύναμη είναι:

$$F_R = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin\theta dA = \gamma \sin\theta \int_A y dA \ (1)$$

Το ολοκλήρωμα $\int_A y dA$ είναι η πρώτη ροπή της επιφάνειας ως προς χ

$$\int_A y dA = y_c A$$

y_c = y συντεταγμένη του κέντρου βάρους

Η (1) γράφεται

$$F_R = \gamma A y_c \sin\theta$$

$$F_R = \gamma A h_c$$

Προσδιορισμός του σημείου εφαρμογής της F_R (κέντρο πίεσης)

Η ροπή της συνισταμένης δύναμης είναι ίση με τη ροπή των επιμέρους δυνάμεων.
Η συντεταγμένη y_R προσδιορίζεται απο το αθροισμα ροπών ως προς τον αξονα x.

$$\mathbf{F_R y_R = \int_A y dF = \int_A \gamma \sin\theta y^2 dA}$$

Αφού $F_R = \gamma A y_c \sin\vartheta$ έχουμε

$$y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{y_c A} = \frac{I_x}{y_c A}$$ όπου $I_x =$ ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παράλληλων αξόνων

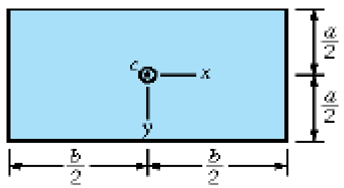
$$I_x = I_{xc} + A y_c^2$$ όπου $I_x =$ δεύτερη ροπή της επιφάνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους και παράλληλο στον άξονα x

Παρόμοια η συντεταγμένη x_R προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$F_R x_R = \int_A \gamma \sin\vartheta \, xy \, dA$$

και τελικά καταλήγουμε στη σχέση

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$ όπου $I_{xyc} =$ γινόμενο αδράνειας ως προς ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που διέρχεται από το κέντρο βάρους.



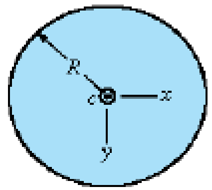
$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12} b a^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12} a b^3$

$I_{xyc} = 0$

(a)

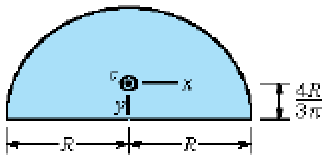


$A = \pi R^2$

$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$

$I_{xyc} = 0$

(b)



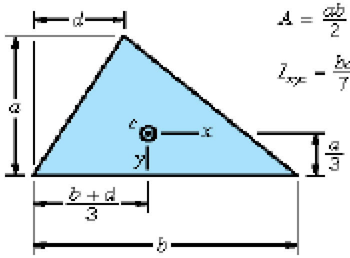
$A = \frac{\pi R^2}{2}$

$I_{xc} = 0.1098 R^4$

$I_{yc} = 0.3927 R^4$

$I_{xyc} = 0$

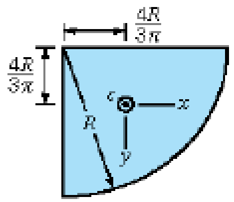
(c)



$A = \frac{ab}{2}$ $\quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$

$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$

(d)



$A = \frac{\pi R^2}{4}$

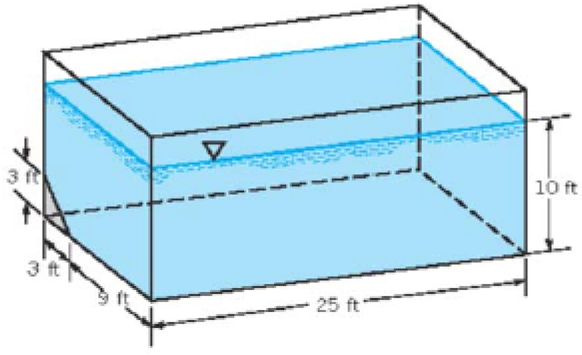
$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488 R^4$

$I_{xyc} = -0.01647 R^4$

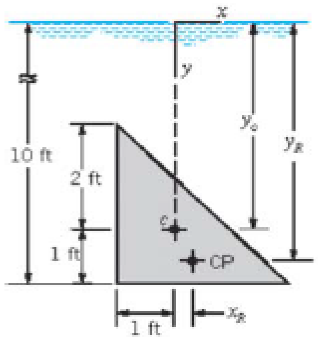
(e)

Γεωμετρικές ιδιότητες χαρακτηριστικών επιφανειών

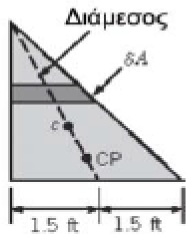
Η δεξαμενή του σχήματος περιέχει θαλασσινό νερό (ρ=1025kg/m^3) σε ένα βάθος 3.0m. Χρειάζεται να αντικατασταθεί το τριγωνικό κομμάτι στη μία γωνία.
Να προσδιορισθεί το μέγεθος και το σημείο εφαρμογής της δύναμης που ασκεί το νερό στην τριγωνική επιφάνεια.



(a)



(b)



(c)

<u>Λύση</u>

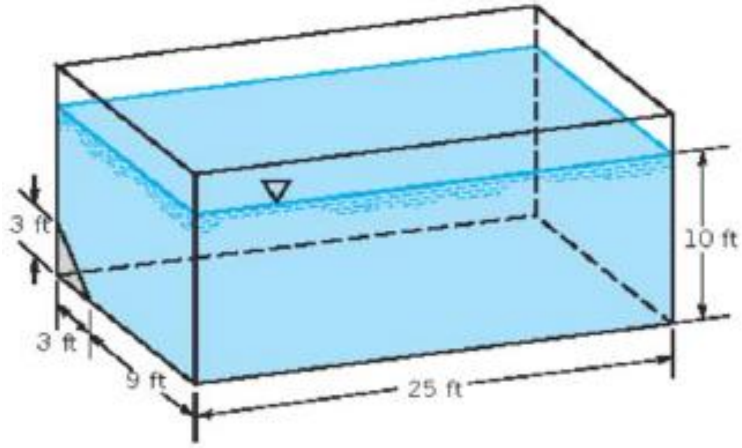
Οι διάφορες αποστάσεις φαίνονται στο σχήμα (b)

y_c=h_c=2.7m

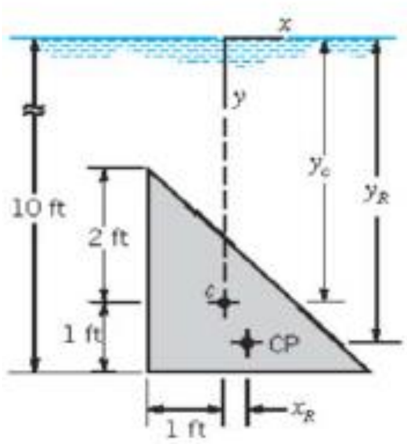
και F_R=$\gamma h_c A$=9.81*1025*2.7(0.9)^2/2=10995N

Η δύναμη αυτή είναι ανεξάρτητη του μήκους της δεξαμενής.

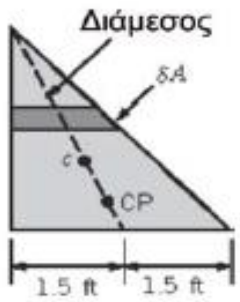
Η συντεταγμένη y του κέντρου πίεσης βρίσκεται από τη σχέση



(a)



(b)



(c)

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c \ , I_{xc} = \frac{0.9(0.9)^3}{36} = 0.018\text{m}^4$$

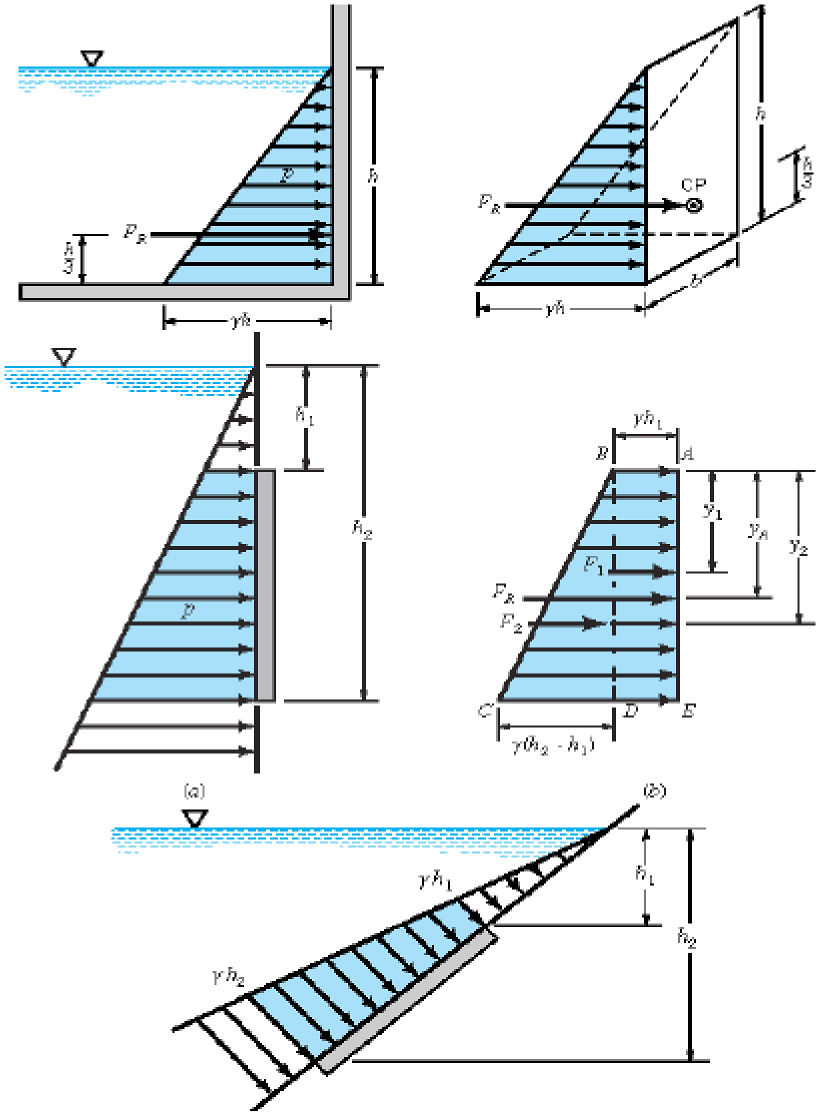
$$y_R = \frac{0.018}{2.7\,\frac{(0.9 * 0.9)}{2}} + 2.7 = 2.716\text{m}$$

Παρόμοια :

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c \ , I_{xyc} = \frac{0.9(0.9)^2}{72}0.9 = 0.0091\text{m}^4$$

$$x_R = 0.0083\text{m}$$

ΠΡΙΣΜΑ ΠΙΕΣΗΣ



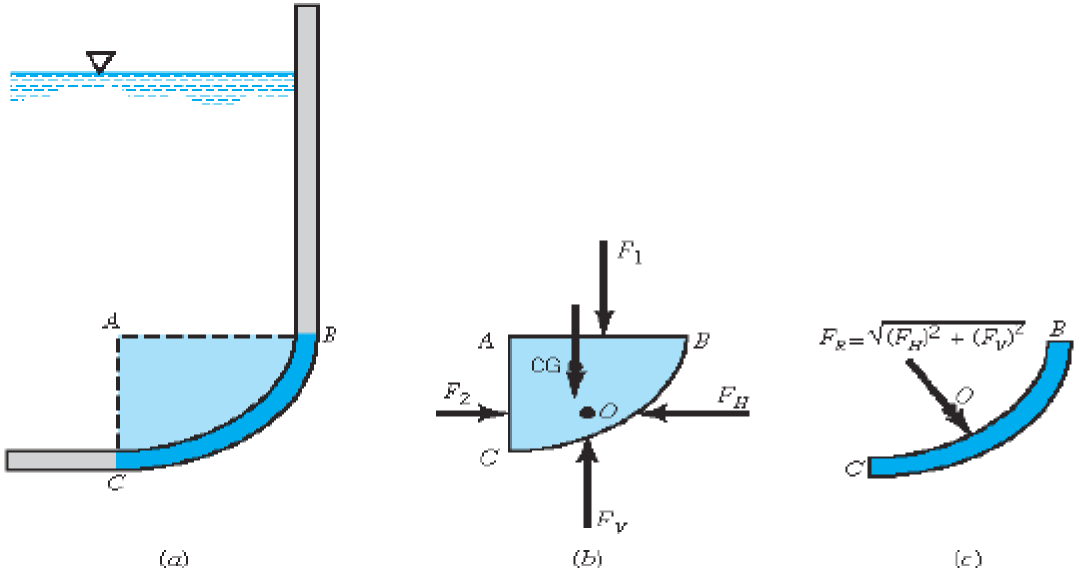
$$F_R = p_{\alpha\nu} A = \gamma \frac{h}{2} A$$

$$F_R = \text{όγκος} = \frac{1}{2}(\gamma h)(bh) = \gamma \frac{h}{2} A$$

$$\mathbf{F_R = F_1 + F_2}$$

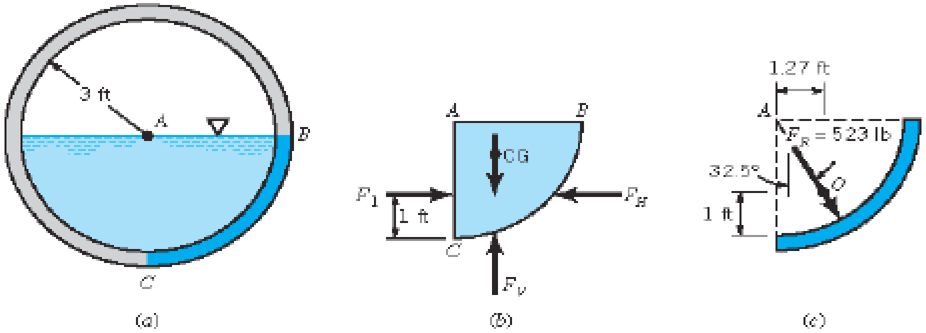
$$\mathbf{F_R y_R = F_1 y_1 + F_2 y_2 \Rightarrow y_R = \ldots}$$

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ



- Επιλογή όγκου ελέγχου που περιλαμβάνει την επιφάνεια
- Ισορροπία δυνάμεων στον όγκο ελέγχου
- Οριζόντια διεύθυνση $F_2=F_H$ α=tan-1(F_V/ F_H) ως προς το οριζόντιο επίπεδο
- Κατακόρυφη διεύθυνση $F_1+W=F_V$
- $F_R=\sqrt{F^2_H+F^2_V}$

Ο αποχετευτικός σωλήνας του σχήματος έχει διάμετρο 1.8 m και είναι μισογεμάτος με νερό.Να υπολογισθεί το μέγεθος και η διεύθυνση της δύναμης που ασκεί το νερό στο τμήμα BC του σωλήνα, μήκους 0.3 m (κάθετα στη διατομή).



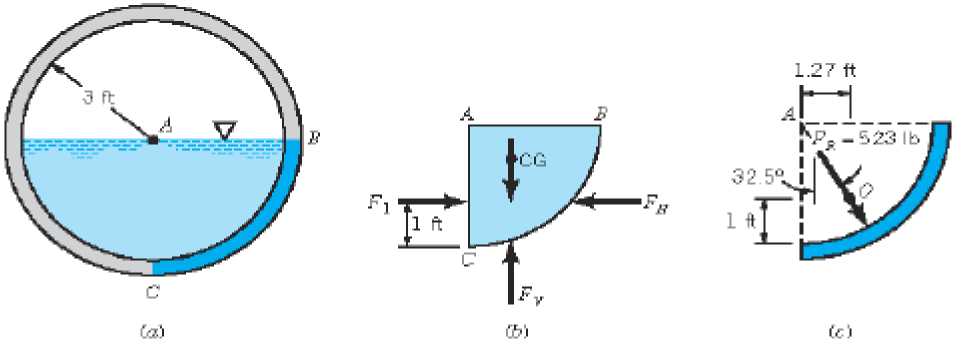
Λύση

- Επιλογή όγκου ελέγχου που περιλαμβάνει την επιφάνεια BC

- Προσδιορισμός των δυνάμεων που δρουν στον όγκο ελέγχου F_1: η δύναμη που δρα στην επιφάνεια AC, W: Το βάρος του νερού στον όγκο ελέγχου

- F_H,F_V:Οι αντιδράσεις από το τοίχωμα στο νερό

- Ισορροπία δυνάμεων



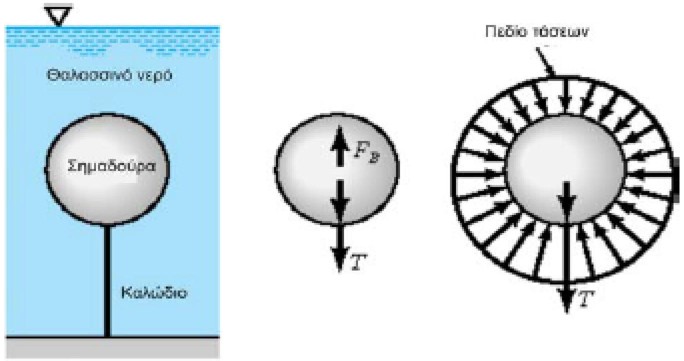
$$F_1 = F_H \Rightarrow \gamma h_c A = F_H \Rightarrow 9810 * \frac{0.9}{2}(0.9 * 0.3) = F_H$$

$$\Rightarrow F_H = 1191.9N$$

$$W = F_V \Rightarrow \gamma V = F_V \Rightarrow 9810 * \left(\frac{\pi 0.9^2}{4} * 0.3\right) = F_V$$

$$\Rightarrow F_V = 1872.2N \Rightarrow F_{o\lambda} = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2} = 2219.4N$$

Μία σφαιρική σημαδούρα έχει διάμετρο 1.5m, ζυγίζει 8.5kN και είναι αγκυρωμένη στον πυθμένα της θάλασσας με ένα καλώδιο.Σε κανονικές συνθήκες η σημαδούρα επιπλέει στην επιφάνεια του νερού. Για κάποιες συνθήκες η σημαδούρα είναι βυθισμένη όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογισθεί η τάση στο καλώδιο.



(a) (b) (c)

Λύση

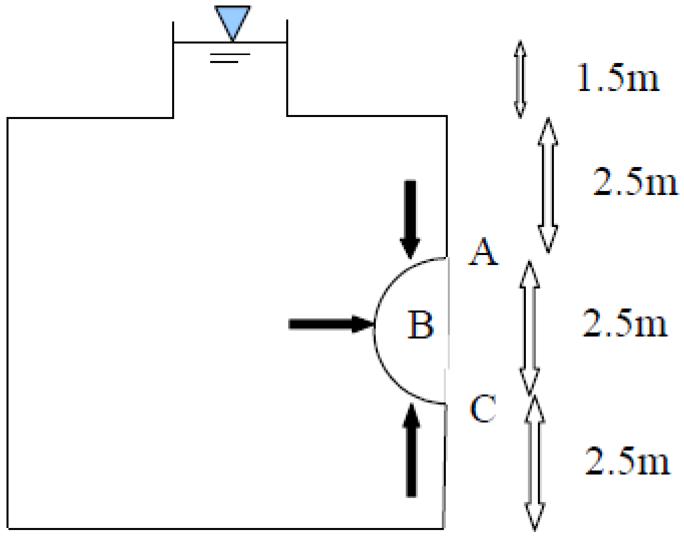
- Από ισορροπία δυνάμεων έχουμε $T=F_B-W$

$$\mathbf{F_B = \gamma_{\theta\alpha\lambda.\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} V = \rho_{\theta\alpha\lambda.\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} g V = 1025 * 9.81 = \frac{\pi 1.5}{6} = 1.785 * 10^4 N}$$

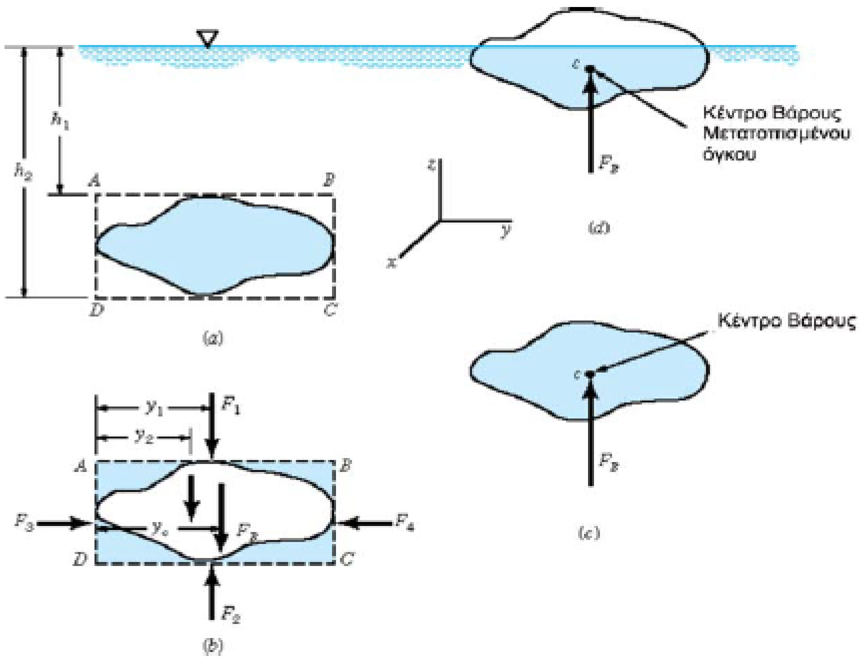
$$\mathbf{W = 8.5kN}$$

Από την (1) έχουμε $\mathbf{T = 1.785 * 10^4 N - 0.85 * 10^4 = 9.65 * 10^3 N}$

1. Στην δεξαμενή του σχήματος, υπάρχει η ημι-κυλινδρική επιφάνεια ABC. Η διάμετρος του ημι-κυλίνδρου είναι 2.5 m. Το μήκος του ημι-κυλίνδρου, δηλαδή η διάσταση που δεν φαίνεται στο σχήμα είναι ίση με τον AM σας σε mm. Η δεξαμενή περιέχει νερό (γ=9810 N/m^3), και η ελεύθερη επιφάνειά της είναι σε επαφή με την ατμόσφαιρα. Να βρεθούν η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της υδροστατικής δύναμης.



ΑΝΩΣΗ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ-ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ



$$\mathbf{F_B = F_2 - F_1 - W}$$

W : βάρος γραμ / μένης επιφ.

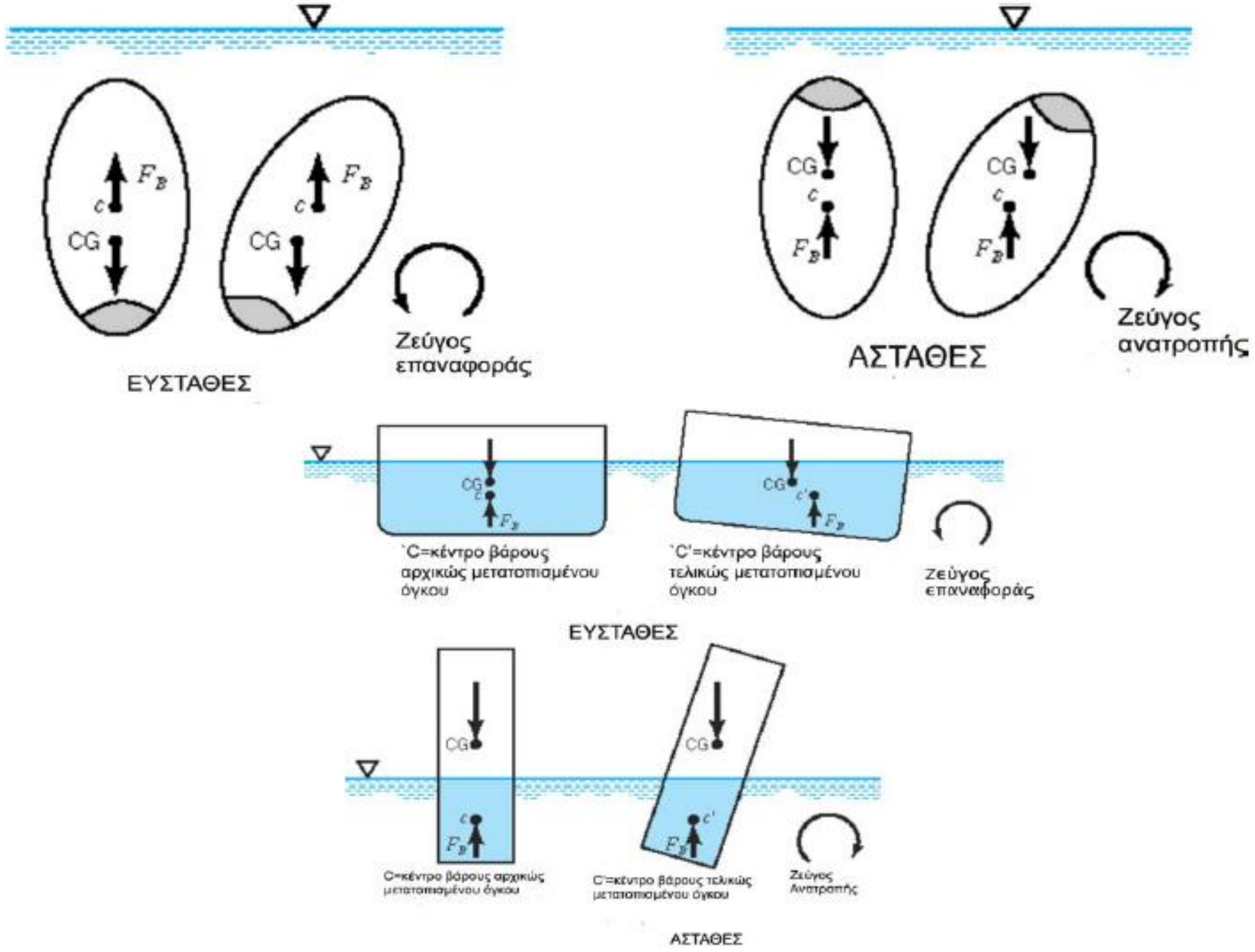
$$\mathbf{F_2 - F_1 = \gamma(h_2 - h_1)A}$$

$$\mathbf{F_B = \gamma(h_2 - h_1)A - \gamma\{(h_2 - h_1)A - V\}}$$

$$\mathbf{F_B = \gamma V}$$

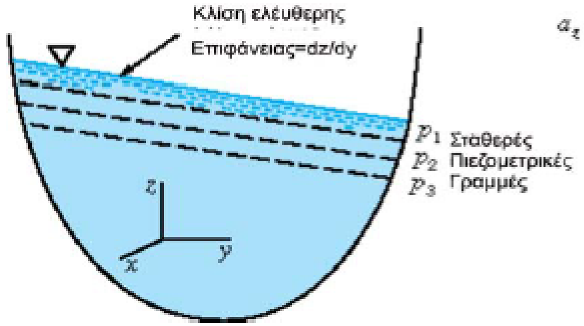
V : όγκος σώματος

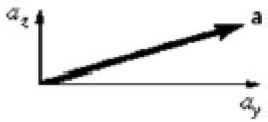
ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΑΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ



ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ ΜΕ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ-ΣΩΜΑΤΟΣ

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\alpha_x \,,\, -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\alpha_y \,,\, -\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho\alpha_z \,,$$





α) Γραμμική Κίνηση

$$* \alpha_x = 0 \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$* \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\alpha_y$$

$$* \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + \alpha_z)$$

$$* dp = \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \Rightarrow$$

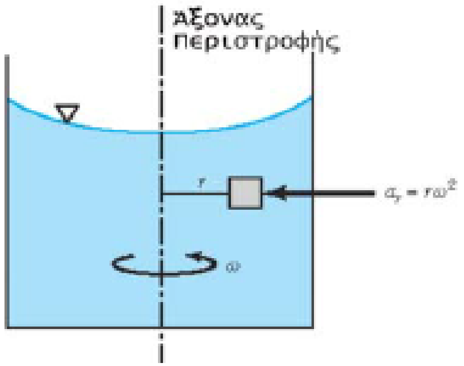
$$dp = -\rho\alpha_y dy - \rho(g + \alpha_z)dz$$

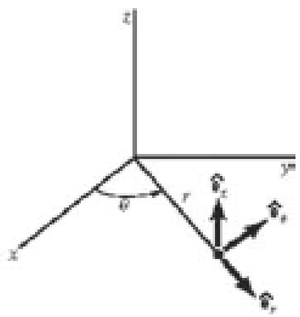
$*$ Για γραμμή σταθερής πίεσης $dp = 0 \Rightarrow$

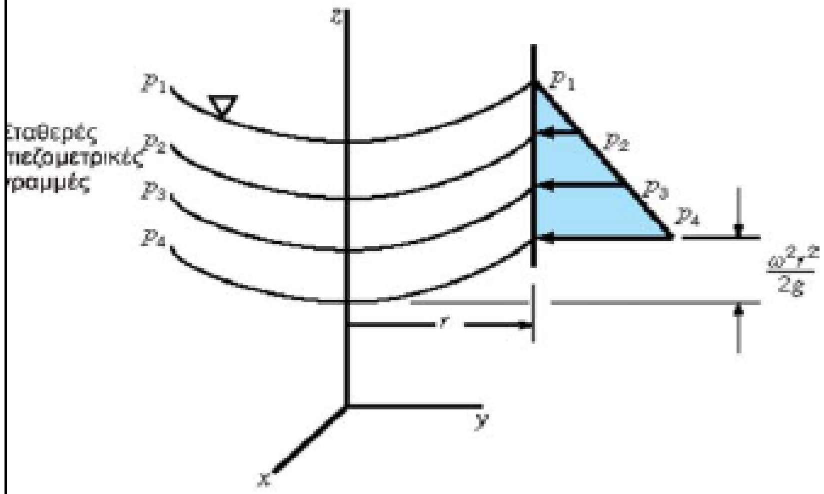
$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = -\frac{\alpha_y}{g + \alpha_z}$$

(Για $\alpha_y = 0, \alpha_z \neq 0$ π.χ. ασανσέρ, $\frac{dp}{dz} = -\rho(g + \alpha_z)$)

Για $\alpha_z = -g \Rightarrow \frac{dp}{dz} = 0$







β)Περιστροφή στερεού σώματος

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \Rightarrow$$

$$dp = \rho r \omega^2 dr - \gamma dz$$

Για $dp = 0$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{g} + \text{σταθερά (παραβολικές επιφάνειες)}$$

Για την πίεση

$$\int dp = \rho \omega^2 \int r dr - \gamma \int dz$$

$$\Rightarrow p = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \gamma z + \text{σταθερά}$$

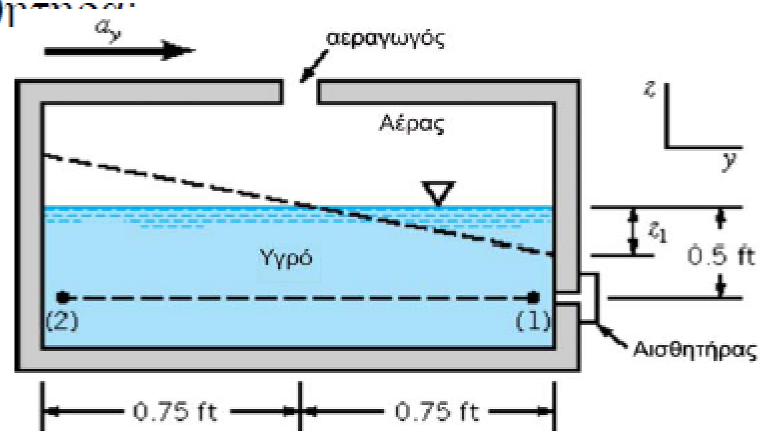
μεταβολή της πίεσης με την ακτίνα αλλά για δεδομένη ακτίνα η πίεση μεταβάλλεται υδροστατικά στο **z**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η δεξαμενή του σχήματος κινείται με σταθερή γραμμική επιτάχυνση.

(α) Να προσδιοριστεί η σχέση μεταξύ της επιτάχυνσης και της πίεσης στον αισθητήρα για υγρό με πυκνότητα 650 kg/m^3.

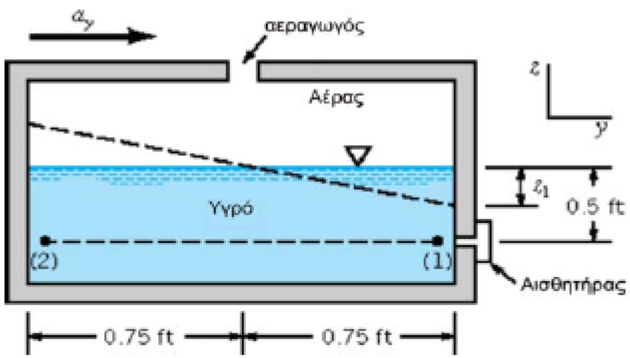
(β) Ποια είναι η μέγιστη επιτάχυνση για την οποία η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού αγγίζει τον αισθητήρα;



Λύση

(α) •Για σταθερή οριζόντια επιτάχυνση η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\alpha_y}{g} \qquad (\alpha_z = 0)$$



- Για επιτάχυνση a_y η μεταβολή του βάθους z_1 δίνεται από τη σχέση

$$-\frac{z_1}{0.75} = -\frac{\alpha_y}{g} \Rightarrow z_1 = 0.75\left(\frac{\alpha_y}{g}\right)$$

- Η πίεση θα είναι υδροστατική (α_z=0) και επομένως

$$p = \gamma h \Rightarrow p = \rho g h \Rightarrow p = 650 * 9.81 * \left(0.05 - 0.75\frac{\alpha_y}{g}\right)$$

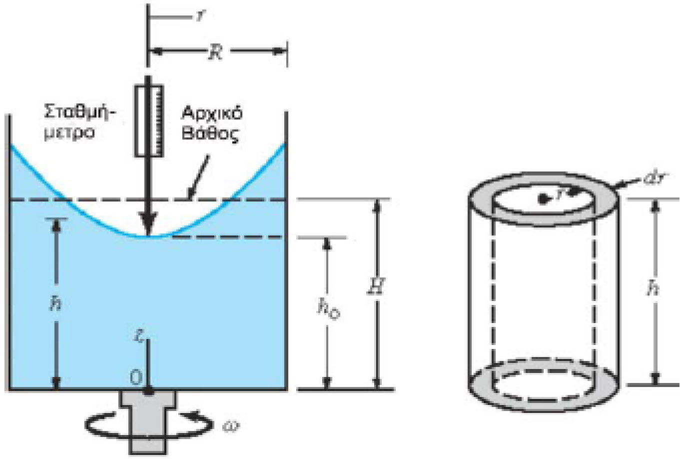
$$\Rightarrow p = 3188.2 - 487.5\alpha_y$$

(β) Από την εξίσωση $-\frac{z_1}{0.75} = -\frac{\alpha_y}{g}$ έχουμε

$$\frac{0.5}{0.75} = -\frac{\alpha_{y,max}}{g} \Rightarrow \alpha_{y,max} = 6.54 m/s^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η γωνιακή ταχύτητα ω ενός σώματος ή ενός εμβόλου μπορεί να μετρηθεί με τη διάταξη του σχήματος μετρώντας με ένα σταθμήμετρο τη διαφορά στάθμης ($H-h_0$). Να προσδιορισθεί η σχέση μεταξύ ω και ($H-h_0$).

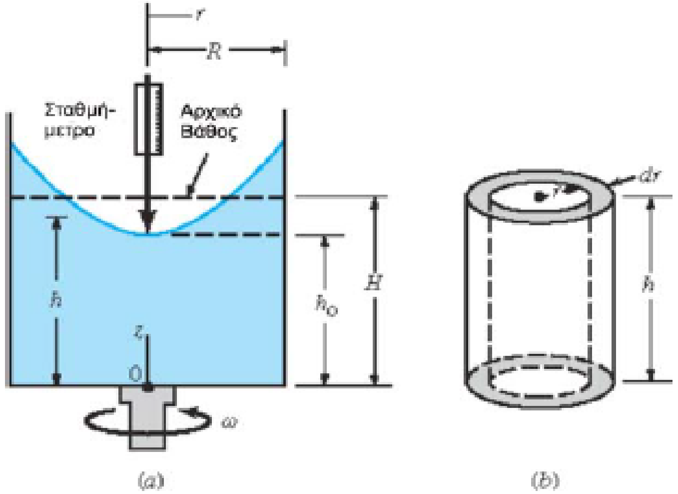


(a) (b)

Λύση

- Το ύψος h της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να προσδιορισθεί από τη σχέση

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0$$



- Ο αρχικός όγκος του ρευστού στη δεξαμενή είναι

$$V_{αρχ} = \pi R^2 H$$

- Ο τελικός όγκος του ρευστού υπολογίζεται με βάση τον στοιχειώδη όγκο του σχήματος

$$V_{τελ} = 2\pi \int_0^R r\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0\right) dr = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi R^2 h_0$$

- Από Vαρχ = V τελ (χωρίς υπερχείλιση) έχουμε

$$\pi R^2 H = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi R^2 h_0 \Rightarrow H - h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$