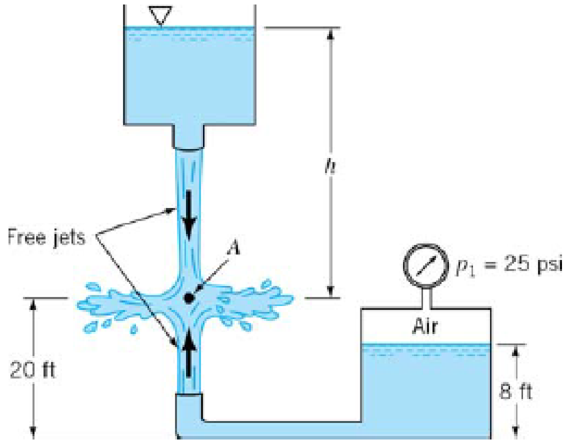
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI-ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δύο φλέβες νερού συγκρούονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογισθεί το ύψος h. (1 ft=0.305 m, 1 psi=$6.894*10^3$ Pa)



ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας την εξ. Bernoulli μεταξύ των 2 (ελεύθερη επιφάνεια πάνω δεξαμενής) και A έχουμε:

$$\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2=\frac{p_A}{\gamma}+\frac{U_A^2}{2g}+z_A \quad \text{όπου } p_2=0,\ U_2=0,\ z_2=(h+6)\ m,\ U_A=0,\ z_A=6\ m$$

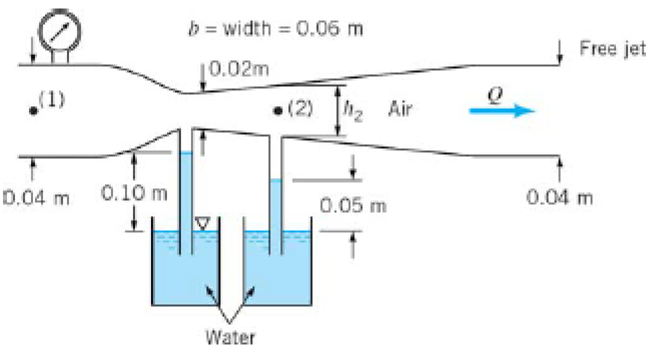
$$\text{Επομένως}\ \ h+6=\frac{p_A}{\gamma}+6 \Rightarrow \frac{p_A}{\gamma}=h \quad (1)$$

Επίσης εφαρμόζοντας την εξ. Bernoulli μεταξύ των 1 (διεπιφάνεια νερού-αέρα) και A

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_A}{\gamma}+\frac{U_A^2}{2g}+z_A \quad \text{όπου } p_1=1.72*10^5\,Pa,\ U_1=0,\ z_1=2.4\ m,\ U_A=0,\ z_A=6\ m$$

$$\text{Επομένως}\quad \frac{p_1}{9810}+2.4=\frac{p_A}{9810}+6 \Rightarrow p_A=1.37*10^5\,Pa \text{ και απο την (1) } h=13.93\ m$$

2. Αέρας ρέει στον αγωγό του σχήματος ορθογωνικής διατομής πλάτους 0.06 m και ύψους στην έξοδο 0.04 m.
(α) Υπολογίστε την παροχή στον αγωγό όταν στον πιεζομετρικό σωλήνα που βρίσκεται στον «λαιμό» του αγωγού ύψους 0.02 m το νερό ανέρχεται σε ύψος 0.10 m.
(β) Προσδιορίστε το ύψος h_2 στην διατομή (2) όπου το νερό ανέρχεται 0.05 m στον σωλήνα
(γ) Υπολογίστε την πίεση στην διατομή (1)



ΛΥΣΗ

(α) Για μόνιμη, ασυμπίεστη, μη-συνεκτική ροή και με εφαρμογή της εξ. Bernoulli μεταξύ του λαιμού (3) και της εξόδου (4) του αγωγού έχουμε

$$\frac{p_3}{\gamma}+\frac{U_3^2}{2g}=\frac{p_4}{\gamma}+\frac{U_4^2}{2g} \quad (1) \quad \text{όπου } p_3=-\gamma_{\nu\varepsilon\rho} l=-9810*0.10=-981\ \text{N/m}^2, p_4\text{=0, } \gamma\text{=12 N/m}^3$$

$$\text{Επίσης } U_3A_3=U_4A_4 \ \Rightarrow \ U_3=\frac{A_4}{A_3}U_4=2U_4$$

(β)

$$\text{Αρα η (1) γίνεται } \frac{-981}{12}+\frac{(2U_4)_3^2}{2*9.81}=\frac{U_4^2}{2*9.81}\Rightarrow U_4=23.1\ \text{m/s}$$

$$\text{και } Q\text{=}U_4A_4=0.0554\ \text{m}^3/\text{s}$$

Εφαρμόζοντας την εξ. Bernoulli μεταξύ των (2) και (4) έχουμε

$$\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}=\frac{p_4}{\gamma}+\frac{U_4^2}{2g} \quad (2) \quad \text{όπου } p_2=-\gamma_{\nu\varepsilon\rho} l_2=-9810*0.05=-495\ \text{N/m}^2, p_4\text{=0, } U_4=23.1\ \text{m/s}$$

Επομένως απο την (2) $U_2 =\ 36.5$ **m/s**

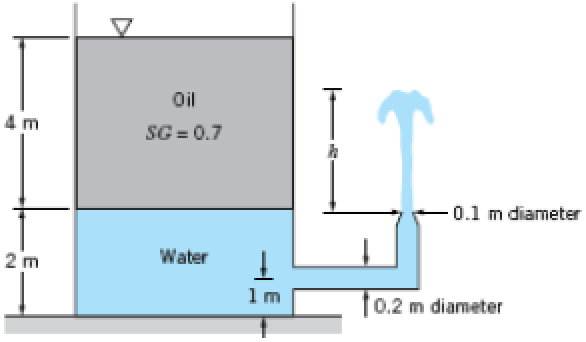
Επίσης $U_2A_2=U_4A_4=0.0554\ \text{m}^3/\text{s}\Rightarrow 46.5*0.06*h=0.0554\Rightarrow h=0.0253\ \text{m}$

(γ) Εφαρμόζοντας την εξ. Bernoulli μεταξύ των (1) και (4) έχουμε

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}=\frac{p_4}{\gamma}+\frac{U_4^2}{2g} \quad (3) \text{ οπου } p_4=0,\ U_1A_1=U_4A_4,\ U_1=U_4$$

Επομένως $p_1=p_4=0$

3. Η ροή του σχήματος είναι μόνιμη και μη-συνεκτική.
(α) Προσδιορίστε το ύψος h του πίδακα, (β) Υπολογίστε την ταχύτητα στον σωλήνα, (γ) Υπολογίστε την πίεση στον οριζόντιο σωλήνα



ΛΥΣΗ

(α) Εφαρμόζοντας την εξ. Bernoulli μεταξύ των 1 (διεπιφάνεια νερού-λαδιού) και 2 (κορυφή πίδακα) έχουμε

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2 \quad \text{(1) οπου } p_1=\gamma_{λαδ}4,\ U_1=0,\ z_1=0,\ p_2=0,\ U_2=0,\ z_2=h$$

Επομένως $\frac{\gamma_{λαδ}4}{\gamma}=h \Rightarrow h=2.8\text{ m}$

(β) Η ταχύτητα στην έξοδο του ακροφυσίου (θέση 3) υπολογίζεται από την εξ. Bernoulli

$$U_3=\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad U_3=7.41\text{ m/s}$$

Απο την εξ. συνέχειας έχουμε $U_3A_3=U_4A_4 \Rightarrow U_4=U_3\frac{A_3}{A_4}=U_3\left(\frac{D_3}{D_4}\right)^2=1.85\text{ m/s}$

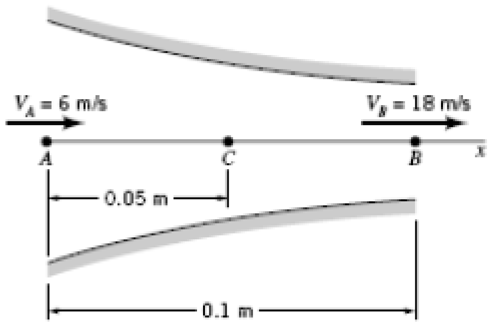
(Η διατομή 4 είναι μία τυχαία διατομή του οριζόντιου σωλήνα)

(γ) Εφαρμόζοντας την εξ. Bernoulli μεταξύ ενός τυχαίου σημείου 5 στον οριζόντιο σωλήνα και του σημείου 2 (κορυφή πίδακα) έχουμε

$$\frac{p_5}{\gamma}+\frac{U_5^2}{2g}+z_5=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2 \quad \text{οπου } U_5=1.85\text{ m/s},\ z_5=-1\text{ m},\ p_2=0,\ U_2=0,\ z_2=2.8\text{ m}$$

Επομένως $\frac{p_5}{\gamma}+\frac{1.85^2}{2*9.81}=2.8 \Rightarrow p_5=35.5\text{ kPa.}$

4. Η ταχύτητα του ρευστού κατά μήκος του άξονα x μεταβάλλεται από 6 m/s στο σημείο A σε 18 m/s στο σημείο B. Η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση. Υπολογίστε την επιτάχυνση στα σημεία A, B και C. Η ροή είναι μόνιμη.



ΛΥΣΗ

Η επιτάχυνση μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση

$$\mathbf{a = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = U\frac{\partial U}{\partial x}} \quad \textbf{(1)} \quad \textbf{(μόνιμη ροή)}$$

Αφού η ταχύτητα είναι γραμμική συνάρτηση της απόστασης x θα έχουμε $U=c_1x+c_2$ οπου οι σταθερές c_1 c_2 δίνονται από τις σχέσεις $U_A=6=c_2$ και $U_B=18=0.1c_1+c_2$ και τελικά $c_1=120$ και $c_2=6$.

Επομένως $U=(120x+6)$ m/s με το x σε m.

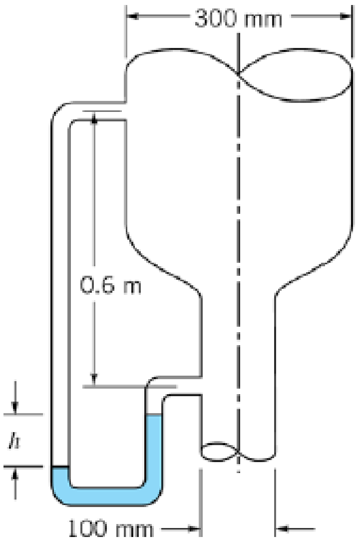
Από την σχέση (1) έχουμε

$$\mathbf{a = U\frac{\partial U}{\partial x} = (120x + 6)(120)}$$

και για $\mathbf{x_A = 0 \Rightarrow\ a_A = 720\ m/s^2}$, για $\mathbf{x_B = 0.05\ m \Rightarrow\ a_B = 1440\ m/s^2}$,

για $\mathbf{x_C = 0.1\ m \Rightarrow\ a_C = 2160\ m/s^2}$

5. Λάδι πυκνότητας 900 kg/m^3 ρέει στο σωλήνα του σχήματος. Αν η ένδειξη του υδραργυρικού μανομέτρου (πυκνότητας 13600 kg/m^3) είναι 100 mm και οι απώλειες ενέργειας αμελητέες υπολογίστε την παροχή στον σωλήνα.



ΛΥΣΗ

Η παροχή μπορεί να υπολογισθεί από

$$Q = A_1U_1 = A_2U_2 = \frac{\pi D_1^2}{4}U_1 = \frac{\pi D_2^2}{4}U_2 \quad (1)$$

Για τον προσδιορισμό των U_1 και U_2 εφαρμόζουμε την εξ. Ενέργειας για την ροή μεταξύ των (1) και (2). Επομένως

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + gz_1 \qquad (2)$$

Απο (1) και (2) παίρνουμε

$$\frac{U_2^2}{2}(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4) = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) \quad (3)$$

Για τον προσδιορισμό του $(p_1-p_2)/\rho$ από το μανόμετρο παίρνουμε

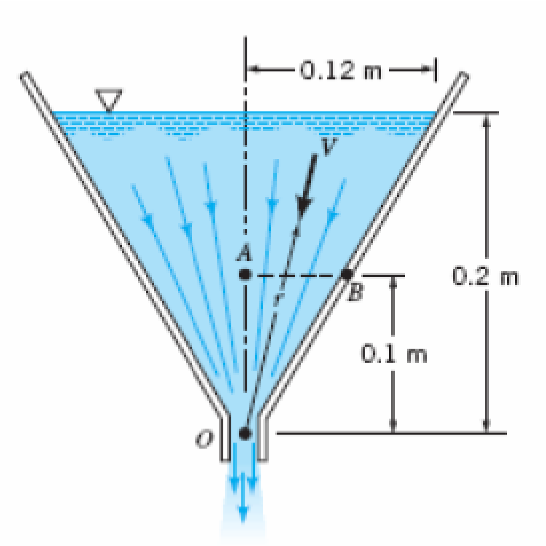
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = gh(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{\lambda\alpha\delta}} - 1) - g(z_1 - z_2) \quad (4)$$

Απο (3) και (4)

$$U_2 = \sqrt{\frac{2gh(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{\lambda\alpha\delta}} - 1)}{1 - (\frac{D_2}{D_1})^4}} \quad \Rightarrow U_2 = 5.29 \text{ m/s}$$

Απο την (1) παίρνουμε Q=0.042 m^3 / s.

6. Στο χωνί του σχήματος η ροή του νερού είναι μόνιμη. Η ταχύτητα μεταβάλλεται με την ακτινική απόσταση r όπως $V=c/r^2$ όπου c=σταθερά. Αν για r=0.1 m η ταχύτητα είναι 0.4 m/s να υπολογισθεί η επιτάχυνση στα σημεία Α και Β.



ΛΥΣΗ

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης κατά μήκος μιας ροικής γραμμής και κάθετα σε μια ροική γραμμή (a_s, a_n αντίστοιχα) δίνονται από τις σχέσεις

$$a_s = V\frac{\partial V}{\partial s} = -V\frac{\partial V}{\partial r} \text{ οπου } V=\frac{c}{r^2}$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = 0 \text{ αφού } R=\infty \text{ (οι ροικές γραμμές είναι ευθείες)}$$

Η τιμή της σταθεράς c είναι $c=Vr^2 = 0.4*0.1^2 = 4*10^{-3}\ m^3/s$

η $V=\dfrac{4*10^{-3}}{r^2}$ **(m/s) οπου το r είναι σε m.**

Επομένως $a_s = -\left(\dfrac{c}{r^2}\right)\left(-\dfrac{2c}{r^3}\right) = \dfrac{2c^2}{r^5} \Rightarrow$ **Στο Α** $a_s = \dfrac{2(4*10^{-3})^2}{0.1^5} = 3.2\ m/s^2$

και στο Β $a_s = \dfrac{2(4*10^{-3})^2}{0.1167^5} = 1.48\ m/s^2$