3.2.Σταθερή ασυμπίεστη ροή σε αγωγούς υπό πίεση.

3.2.1. Γενικά.

Η αρχή της ενέργειας εφαρμόζεται στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων ροής σε διαφορετικούς τομείς της επιστήμης του Μηχανικού. Η ροή ενός πραγματικού ρευστού είναι πιό περίπλοκη από αυτήν ενός τέλειου. Δυνάμεις διάτμησης μεταξύ των σωματιδίων του ρευστού και των τοιχωμάτων των αγωγών απορέουν από το ιξώδες του πραγματικού ρευστού. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ροή, δεν έχουν γενική λύση. Πειραματικές και ημι-εμπειρικές μέθοδοι χρειάζονται για τη λύση προβλημάτων ροής.

Δύο τύποι σταθερής ροής υπάρχουν. Αυτές είναι η στρωτή και η τυρβώδης ροή. Διαφορετικοί νόμοι διέπουν κάθε μία από αυτές.

3.2.2. Στρωτή ροή.

Στη στρωτή ροή τα σωματίδια του ρευστού κινούνται κατά μήκος παραλλήλων τροχιών, σε στρώματα. Τα μεγέθη των ταχυτήτων γειτονικών στρωμάτων δεν είναι ίσα. Η στρωτή ροή περιγράφεται από τον νόμο που συνδέει τη διατμητική τάση με την κλίση της ταχύτητας, που περιγράφτηκε στο κεφάλαιο των ιδιοτήτων των ρευστών. Οι ιξώδεις, διατμητικές δυνάμεις υπερισχύουν, καθώς δεν έχουν εμφανιστεί τυρβώδεις συνθήκες, λόγω του ότι οι δυνάμεις αδράνειας είναι αμελητέες.

3.2.3. Αριθμός Reynolds.

Ο αριθμός Reynolds, είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που δείχνει τον λόγο των δυνάμεων αδρανείας ως προς τις δυνάμεις της διάτμησης. Δίνεται από τον τύπο:

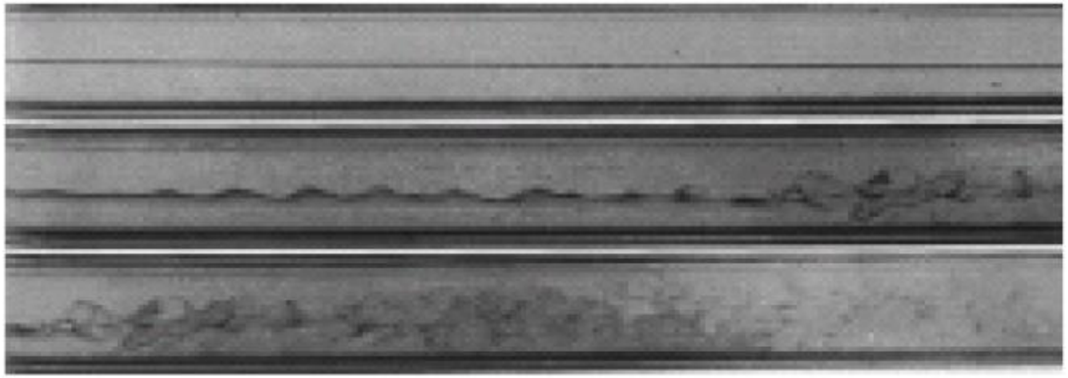
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot \mathrm{U}^2}{\mu \cdot \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{D}}} = \frac{\rho \cdot \mathrm{U} \cdot \mathrm{D}}{\mu} = \frac{U \cdot D}{\nu}$$

όπου ο αριθμητής αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις αδράνειας, και ο παρονομαστής τις δυνάμεις διάτμησης λόγω τριβών. Τα σημαντικά μεγέθη είναι η πυκνότητα (ρ), το δυναμικό (μ) ή το κινηματικό ιξώδες (ν), η μέση ταχύτητα (U), και ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής (D). Στην περίπτωση της ροής μέσα από αγωγό κυκλικής διατομής, το D είναι η διάμετρος του αγωγού. Σε άλλες ροές, το D είναι το πιό χαρακτηριστικό μήκος της ροής. Για παράδειγμα, για την ροή γύρω από μία σφαίρα, το μήκος αυτό θα ήταν η διάμετρος της σφαίρας.

Η κρίσιμη τιμή του αριθμού Re, είναι αυτή που διαχωρίζει την στρωτή ροή από την τυρβώδη, για τις συγκεκριμένες συνθήκες. Η γενικά παραδεκτή τιμή του κρίσιμου Re, δηλαδή για τη μετάβαση από την στρωτή στην τυρβώδη ροή για την περίπτωση της ροής σε αγωγό είναι 2000. Αυτή η τιμή όμως μπορεί να τροποποιηθεί ανάλογα με το αν η ροή είναι αύξουσα ή φθίνουσα, με το αν η αύξηση της ροής γίνεται σταδιακά ή απότομα, με το άν υπάρχουν ταλαντώσεις του αγωγού ή όχι, και από άλλους παράγοντες.

3.2.4. Τυρβώδης Ροή.

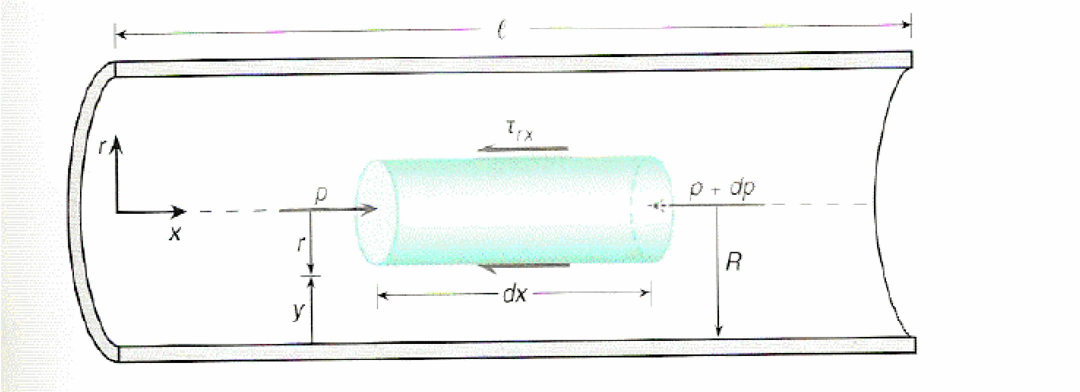
Στην τυρβώδη ροή τα σωματίδια του ρευστού κινούνται με ακανόνιστο, χαοτικό τρόπο σε όλες τις διευθύνσεις. Είναι αδύνατο να εντοπίσει κανείς την τροχιά ενός συγκεκριμένου σωματιδίου. Για να πάρει κανείς μιά ιδέα της κίνησης στην τυρβώδη ροή, στο σχήμα 36 φαίνεται η ροή από το πείραμα του Reynolds, για τρείς διαφορετικούς αριθμούς Re. Πρόκειται για τη ροή μιάς βαφής, που διοχετεύεται μέσα στη ροή νερού, μέσω ενός στομίου. Σε χαμηλά Re, η ροή είναι στρωτή, και η βαφή φαίνεται σαν ευθεία. Σε κρίσιμες τιμές Re, αρχίζει η τυρβώδης ροή, και αρχίζει η μίξη της βαφής με το νερό. Σε ακόμα μεγαλύτερα Re, φαίνεται η χαοτική κίνηση των στοιχείων της βαφής μέσα σε αυτά του νερού.



Σχήμα 36. Στρωτή, μεταβατική και τυρβώδης ροή από το πείραμα του Reynolds.

3.2.5. Διατμητική τάση σε οριζόντιο κυκλικό αγωγό.

Θεωρώντας ένα κυλινδρικό στοιχείο ρευστού μέσα σε οριζόντιο κυλινδρικό αγωγό και εξισώνοντας τις δυνάμεις διάτμησης και διαφοράς πίεσης που δρούν στο στοιχείο, προκύπτει η διατμητική τάση τ, σαν συνάρτηση της απόστασης από τον κεντρικό άξονα της ροής. Επίσης προκύπτει η μέγιστη διατμητική τάση τ_0, που υπάρχει στα τοιχώματα του κυλινδρικού αγωγού.



Σχήμα 37. Η διατμητική τάση και η πίεση σε κυλινδρικό στοιχείο του υγρού.

$$p \cdot \pi \cdot r^2 - (p + dp) \cdot \pi \cdot r^2 - \tau \cdot 2\pi \cdot r \cdot dx = 0 \Rightarrow \tau = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow \tau_0 = \frac{R}{2 \cdot l} \cdot (p_1 - p_2)$$

Οπως φαίνεται στη σχέση, η μέγιστη διατμητική τάση τ_0, που εμφανίζεται στα τοιχώματα του αγωγού είναι ανάλογη της ακτίνας R, και της κλίσης της πίεσης, δηλαδή της μεταβολής τη πίεσης δια του μήκους του αγωγού.

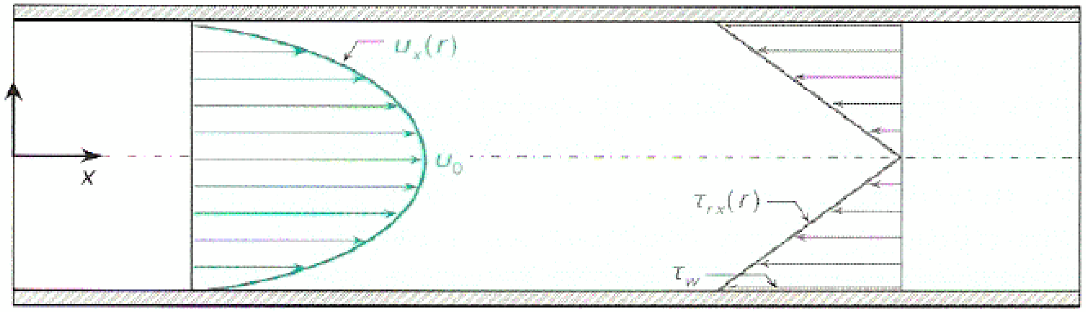
Η πτώση της πίεσης λόγω της διάτμησης είναι:

$$\Delta p = \frac{f}{2} \cdot \frac{l}{D} \cdot \rho \cdot U^2$$

Όπου f ένας συντελεστής τριβής, l το μήκος του αγωγού, D η διάμετρός του και U η μέση ταχύτητα του υγρού. Η σχέση αυτή θα μας χρειαστεί στην επόμενη παράγραφο, για τον προσδιορισμό του συντελεστή τριβής.

3.2.6. Συντελεστής τριβής κυκλικού αγωγού για στρωτή ροή.

Σε κυκλικό αγωγό και στρωτή ροή, η κατανομή της ταχύτητας είναι παραβολική, όπως φαίνεται στο σχήμα και στην εξίσωση που την περιγράφει:



$$U(r) = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Σχήμα 38. Η κατανομή της ταχύτητας, και αυτή της διατμητικής τάσης σε στρωτή ροή σε αγωγό.

Στο σχήμα 38 φαίνονται η κατανομή των ταχυτήτων (αριστερά), και αυτή των διατμητικών τάσεων (δεξιά). Η εξίσωση που περιγράφει την κατανομή της τάσης, είναι αυτή που είχε εξαχθεί στην προηγούμενη παράγραφο. Είναι δηλαδή γραμμική, με τιμή 0 στον κεντρικό άξονα, και παίρνει τη μέγιστη τιμή στα όρια της ροής, δηλαδή στο σημείο επαφής του ρευστού με τον αγωγό.
Οσον αφορά την ταχύτητα, η μέγιστη τιμή της, η οποία είναι στον κεντρικό άξονα της ροής (r=R), είναι

$$U_{\max} = \frac{R^2 \cdot \Delta p}{4 \cdot \mu \cdot 1} = 2 \cdot U_{\mu\varepsilon\sigma\eta}$$

και όπως φαίνεται στην παραπάνω σχέση, είναι διπλάσια από την μέση τιμή της ταχύτητας.

Σε στρωτή ροή αποδεικνύεται ότι f=64/Re, και αντικαθιστώντας στη σχέση της προηγούμενης παραγράφου, παίρνουμε για την πτώση της πίεσης:

$$\Delta p = \frac{f}{2} \cdot \frac{l}{D} \cdot \rho \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{\frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu}} \cdot \frac{l}{D} \cdot \rho \cdot U^2 = 32 \cdot \frac{\mu \cdot 1 \cdot U}{D^2}$$

Επίσης, διαιρώντας δια γ=ρg, η πτώση πίεσης λόγω της τριβής γίνεται:

$$\Delta p = \frac{f}{2} \cdot \frac{l}{D} \cdot \rho \cdot U^2 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\gamma} = h = f \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

Η τελευταία αυτή σχέση, που δίνει τις απώλειες ενέργειας σε μέτρα, για ένα κυλινδρικό αγωγό, μήκους l, διαμέτρου D, όπου υπάρχει ροή ρευστού με μέση ταχύτητα U, είναι σημαντικότατη, και ονομάζεται εξίσωση των Darcy – Weisbach. Οι απώλειες ενέργειας σε μέτρα ύψους, είναι σε αντιστοιχία με όσα έχουν αναφερθεί στην παράγραφο 3.1.8. περί της γραμμής ενέργειας.
Ο συντελεστής f, εξαρτάται από το υλικό του αγωγού, την ποιότητά του, κυρίως με την έννοια της σχετικής τραχύτητάς του, καθώς και από τον αριθμό Reynolds. Για τον συντελεστή αυτόν, έχουν διατυπωθεί πάρα πολλές εμπειρικές σχέσεις. Επίσης, δίνεται από το διάγραμμα του Moody, το οποίο περιγράφεται παρακάτω.
Αρχικά, για την περίπτωση της στρωτής ροής, ο συντελεστής αυτός είναι f=64/Re, δηλαδή ανεξάρτητος από παραμέτρους όπως η σχετική τραχύτητα του αγωγού και το υλικό του.

Για την τυρβώδη ροή, ένας προσεγγιστικός τύπος είναι ο εξής:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.8 \ln \frac{e}{3.7D}$$

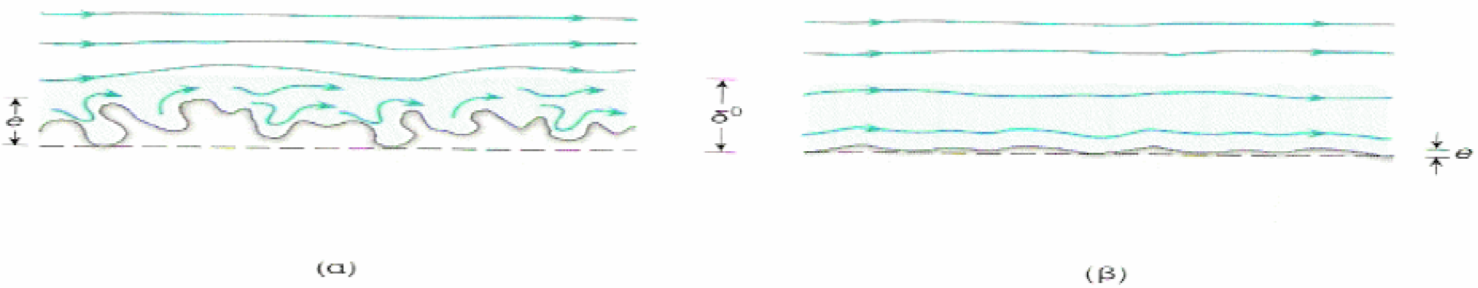
ενώ για την μεταβατική ροή, όταν δηλαδή ο αριθμός Re είναι σε τιμές κοντά στην κρίσιμη τιμή

του, και δεν είναι ξεκάθαρο αν πρόκειται για στρωτή ή τυρβώδη ροή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος των Colebrook και White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln\left(\frac{e}{3.7D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

Υπάρχουν στη βιβλιογραφία πολλές σχέσεις, οι οποίες δίνουν τον συντελεστή f. Εδώ θα αρκεστούμε σε όσες έχουν ήδη αναφερθεί, προσδιορίζοντας ωστόσο την παράμετρο της σχετικής τραχύτητας του αγωγού. Στις παραπάνω σχέσεις, e είναι η μέση τραχύτητα του αγωγού, δηλαδή το μήκος που χαρακτηρίζει τις ατέλειες της διαμέτρου του αγωγού, όπως φαίνεται στο σχήμα 39. Στο ίδιο σχήμα αριστερά, φαίνονται οι αποκλίσεις από την ευθεία στις οποίες υπόκεινται οι τροχιές των σωματιδίων του νερού λόγω της τραχύτητας, και οι οποίες δημιουργούν την τυρβώδη ροή σε μεγάλες ταχύτητες.

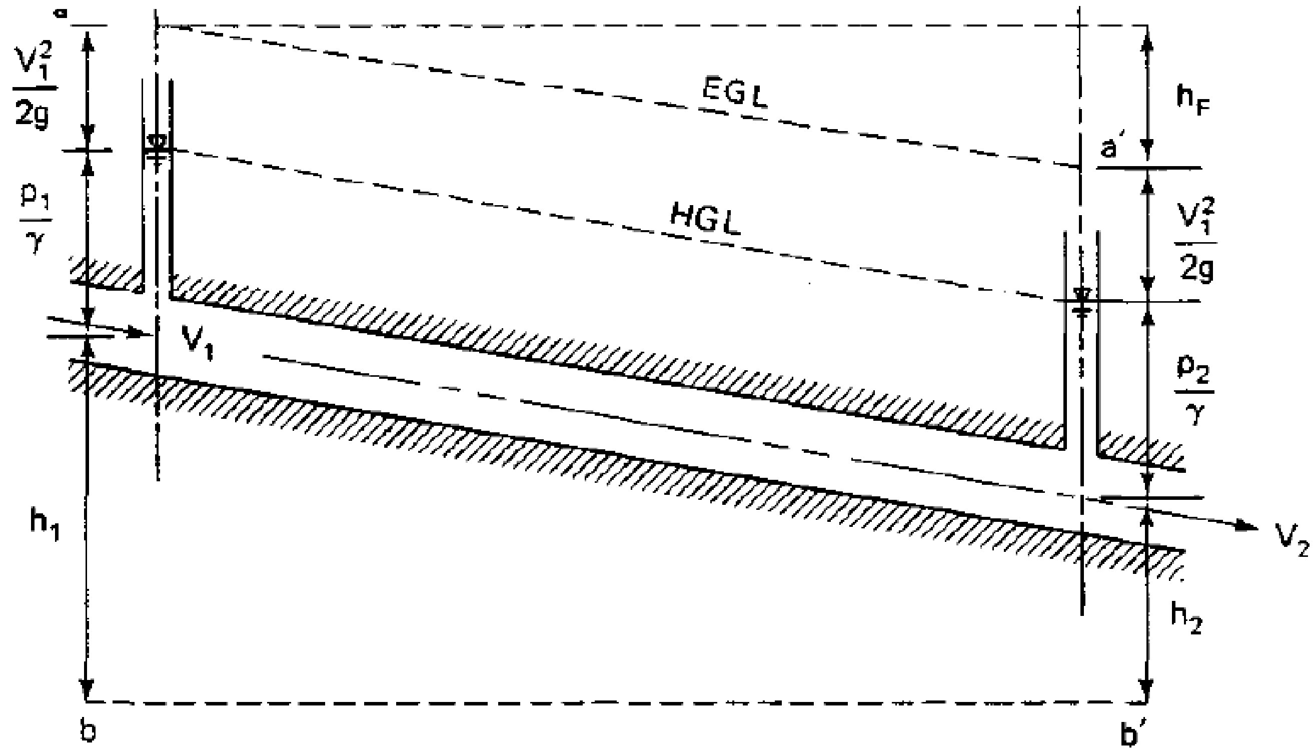
Ενώ λοιπόν η τραχύτητα του αγωγού είναι ένα μήκος, πολύ μικρό σε σχέση με τη διάμετρο του αγωγού, η σχετική τραχύτητα είναι ο αδιάστατος λόγος e/D, που χρησιμοποιείται συνήθως στις εξισώσεις, καθώς και στο διάγραμμα του Moody, που θα δούμε αμέσως παρακάτω.



Σχήμα 4-17 *Απεικόνιση του πεδίου ροής στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα: (α) τραχέος και (β) υδραυλικώς λείου σωλήνα.*

Σχήμα 39. Η τραχύτητα των αγωγών.

Υπολογισμός κύριων απωλειών ενέργειας (λόγω τριβών)



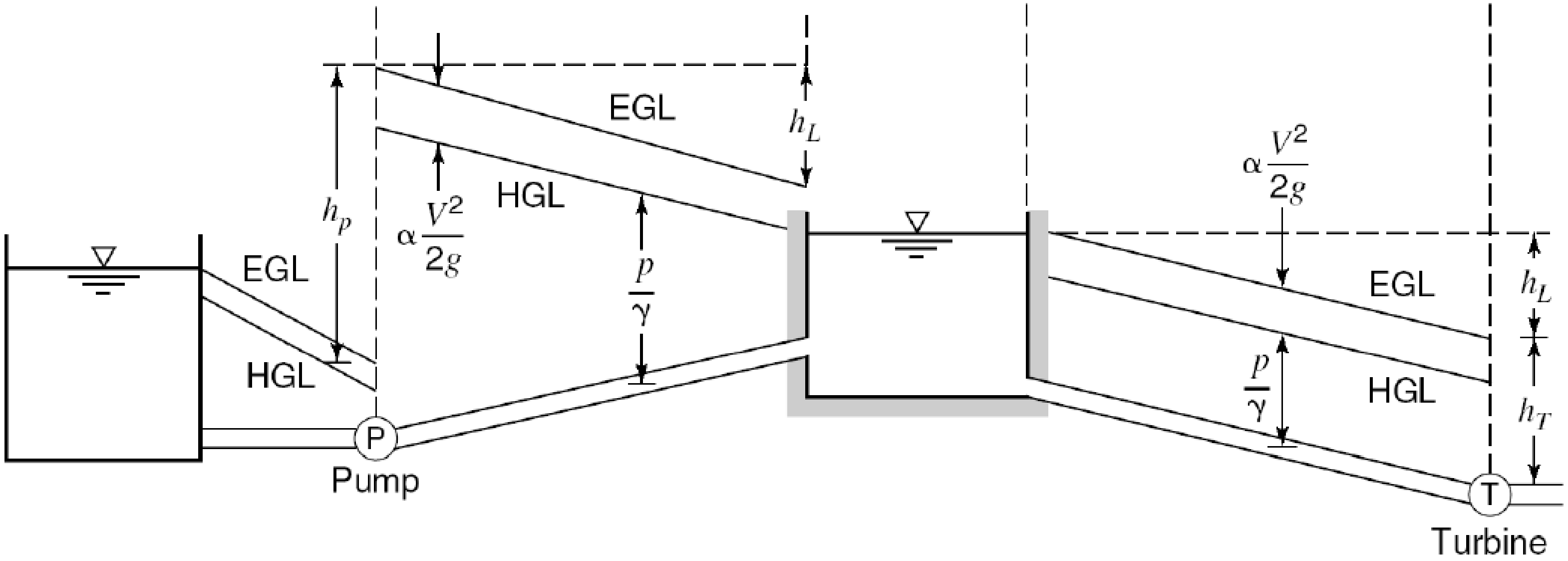
Από την εξίσωση ενέργειας για μόνιμη, ασυμπίεστη ροή, έχουμε

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}+h_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+h_2+h_f$$

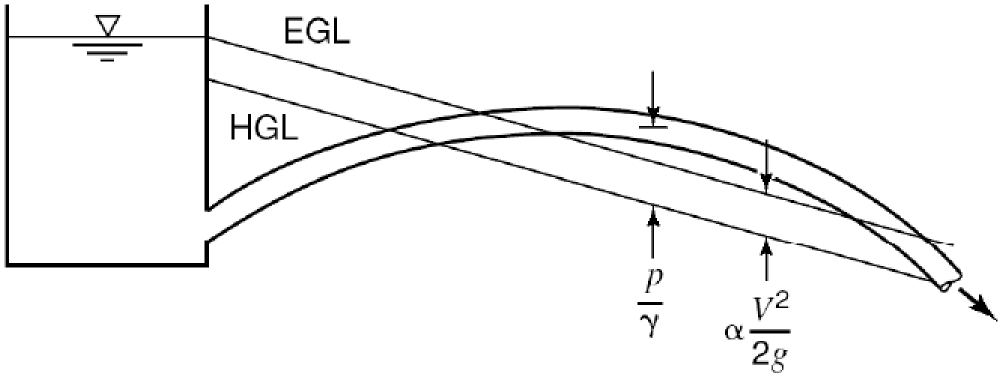
Όπου h_f απώλεια φορτίου μεταξύ των διατομών (1) και (2).

Σύστημα με αντλία η/και στρόβιλο

Η αντλία προσφέρει ενέργεια στην ροή, η τουρμπίνα παίρνει ενέργεια από την ροή.



(*a*)



(*b*)

Εφαρμογή Γ.1

Βρείτε την απαραίτητη ισχύ αντλίας για τη μεταφορά 280 l/min λαδιού πυκνότητας $\rho = 900^{3}$ kg/m και ιξώδους 1 poise σε ύψος 7.5 m με σωλήνα διαμέτρου 5 cm.

$(1 \text{ P} = 0.100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$

Η ταχύτητα ροής στο σωλήνα **U** είναι:

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4\ (0.28)}{60\pi(0.05)^2} = 2.38\ m/s$$

Ο αριθμός **REYNOLDS** της ροής είναι:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{2.38(0.05)}{10^{-1}/900} = 1071 < 2000$$

Η ροή είναι στρωτή. Οι απώλειες τριβής H_f είναι:

$$H_f = \frac{\lambda L}{D}\frac{U^2}{2g} = \frac{64L}{Re}\frac{U^2}{2gD} = \frac{64(75)(2.38)^2}{1071(0.05)2(9.81)} = 25.88\ m$$

Το μανομετρικό ύψος H της αντλίας είναι ίσο με το ύψος απωλειών τριβής αυξημένο με τη διαφορά υψομέτρου και το κινηματικό ύψος. Έχουμε:

$$H = H_f + \Delta z + U^2/2g = 25.88 + 7.50 + 0.29 = 33.67 \text{ m}$$

Η απαιτούμενη ισχύς P είναι:

$$P = \rho g Q H = 900(9.81)(0.28/60)\ (33.67) =$$

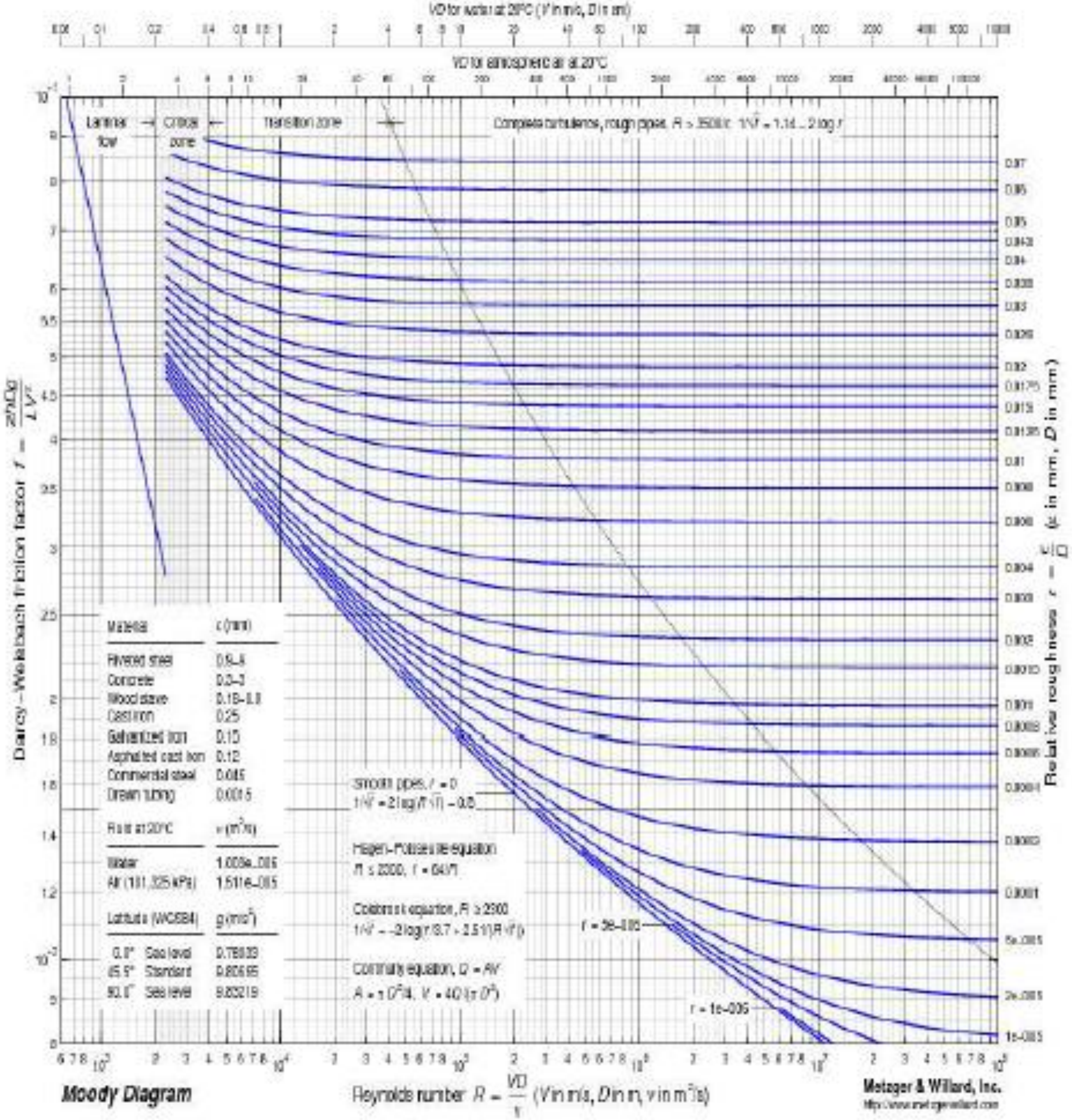
$$= 1.38 \times 10^3 \text{W} = \underline{1.4 \text{ KW}}$$

3.2.7. Διάγραμμα Moody.

Από το διάγραμμα αυτό, προκύπτει ο συντελεστής απωλειών f, ο οποίος χρησιμοποιείται στην σχέση των Darcy – Weisbach. Οι παράμετροι εισόδου στο διάγραμμα (σχήμα 40), είναι ο αριθμός Re, και η σχετική τραχύτητα. Ο Re τοποθετείται στον κάτω οριζόντιο άξονα του διαγράμματος, ενώ οι διαφορετικές τιμές της σχετικής τραχύτητας, βρίσκονται στον δεξιό κατακόρυφο άξονα. Από την τιμή της σχετικής τραχύτητας που ισχύει στην συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε, ακολουθούμε την αντίστοιχη καμπύλη από τα δεξιά του διαγράμματος, μέχρι να συναντήσουμε την κάθετη γραμμή που αντιστοιχεί στο αριθμό Re της ροής μας. Από το σημείο τομής της καμπύλης της σχετικής τραχύτητας με την κάθετη γραμμή του Re, προχωρούμε παράλληλα προς τον άξονα των x, προς τα αριστερά, μέχρις ότου τμήσουμε τον άξονα των y στα αριστερά του διαγράμματος. Εκεί διαβάζουμε την τιμή του f που αντιστοιχεί στα Re και e/D της ροής μας.

Οσον αφορά την σχετική τραχύτητα, είτε θα είναι γνωστή η ίδια, είτε προκύπτει από την απόλυτη τραχύτητα και την διάμετρο του αγωγού. Αν δεν είναι γνωστή η απόλυτη τραχύτητα του αγωγού, μπορούμε να βρούμε σε σχετικούς πίνακες τις τιμές της τραχύτητας που έχουν συνήθως οι αγωγοί, ανάλογα με το υλικό κατασκευής τους.

Οπως μπορεί να δεί κανείς στο διάγραμμα, οι καμπύλες των σχετικών τραχυτήτων, είναι οριζόντιες για μεγάλα Re. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν η ροή είναι έντονα τυρβώδης, η μόνη παράμετρος που επηρεάζει το f είναι η σχετική τραχύτητα. Δηλαδή, όταν η αδράνεια είναι πολύ έντονη σε σχέση με τις τριβές, ο συντελεστής απωλειών επηρεάζεται μόνο από την τραχύτητα. Επίσης, για μικρά Re, δηλαδή για στρωτή ροή, υπάρχει η σχέση $f=64/Re$, η οποία αντιπροσωπεύεται στο διάγραμμα από την ευθεία που φαίνεται στο επάνω αριστερά μέρος του.



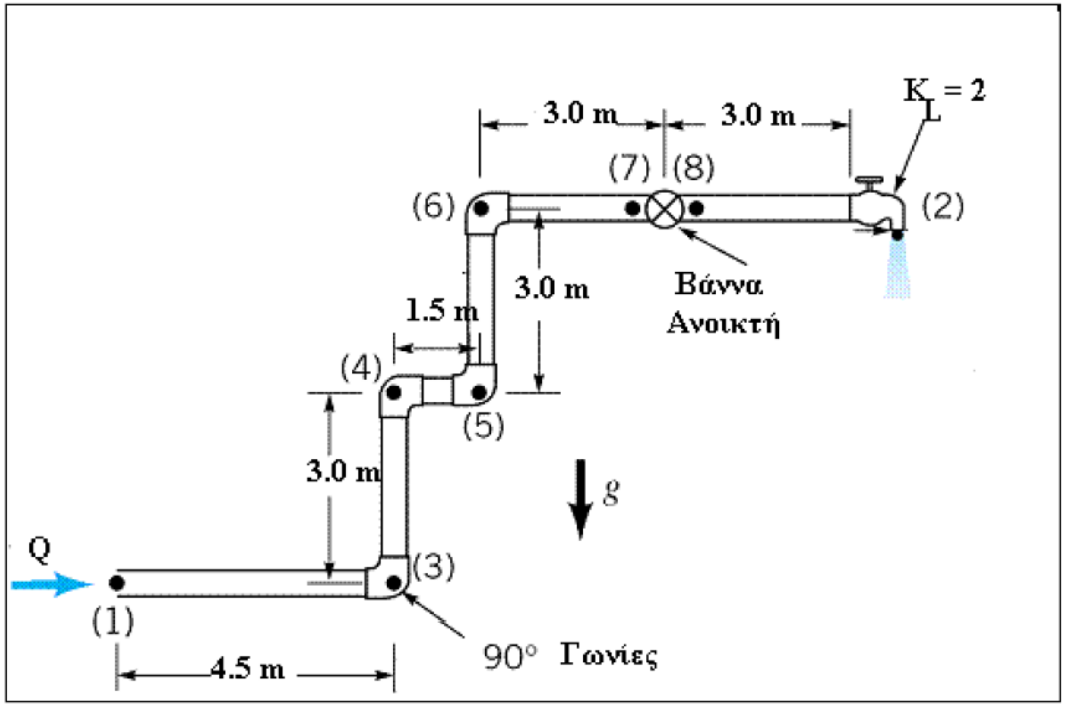
Moody Diagram
Reynolds number $R = \frac{VD}{\nu}$ (V in m/s, D in m, ν in m²/s)
Darcy–Weisbach friction factor $f = \frac{2hDg}{LV^2}$
Relative roughness $r = \frac{\epsilon}{D}$ (ε in mm, D in mm)
VD for water at 20°C (V in m/s, D in m)
VD for atmospheric air at 20°C
Laminar flow
Critical zone
Transition zone
Complete turbulence, rough pipes
Smooth pipes, r = 0
Hagen–Poiseuille equation
Colebrook equation
Continuity equation, Q = AV
Material
Riveted steel
Concrete
Wood stave
Cast iron
Galvanized iron
Asphalted cast iron
Commercial steel
Drawn tubing
Fluid at 20°C
Water
Air (101.325 kPa)
Metzger & Willard, Inc.

3.2.8. Γραμμικές Απώλειες Ενέργειας σε αγωγό.

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, οι γραμμικές απώλειες σε αγωγό μεταφοράς ρευστού, προσδιορίζονται από την εξίσωση των Darcy – Weisbach, σε μέτρα ενέργειας. Το μήκος (ύψος) αυτό των απωλειών, μπορεί να μετατραπεί σε πτώση πίεσης, σύμφωνα με τη σχέση $\Delta p/\gamma=h$, η οποία προαναφέρθηκε.

Οπως δείχνει και η σχέση Darcy – Weisbach, οι γραμμικές απώλειες είναι ανάλογες του μήκους του αγωγού, του τετραγώνου της μέσης ταχύτητας, και του συντελεστή f. Είναι δε αντιστρόφως ανάλογες της διαμέτρου του αγωγού.

Νερό ρέει στον σωλήνα του σχήματος από την θέση (1) στη θέση (2). Η παροχή είναι $7.2*10^{-4}$ m^3/s και η εκροή γίνεται από μία βρύση διαμέτρου 1.25 cm. Ο σωλήνας έχει διάμετρο 2.0 cm και τραχύτητα $1.6*10^{-3}$ mm. Να υπολογισθεί η πίεση στη θέση (1) όταν (α) οι απώλειες ενέργειας θεωρούνται αμελητέες (β) ληφθούν υπόψη οι απώλειες λόγω τριβών (γ) ληφθούν υπόψη όλες οι απώλειες.



(α) Χωρίς απώλειες η εξίσωση ενέργειας από το (1) στο (2) είναι

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + z_2 \qquad (1)$$

όπου

γ = ρg = 9810 kg/m/s

$U_1 = Q/A_1 = 2.3$ m/s

$z_1 = 0.0$

$p_2 = 0.0$

$U_2 = Q/A_2 = 5.86$ m/s και

$z_2 = 6$ m

Από την (1) υπολογίζουμε $p_1 = 73.4$ kPa.

(β) Με απώλειες λόγω τριβών η εξίσωση ενέργειας γίνεται

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2+h_f \qquad (2)$$

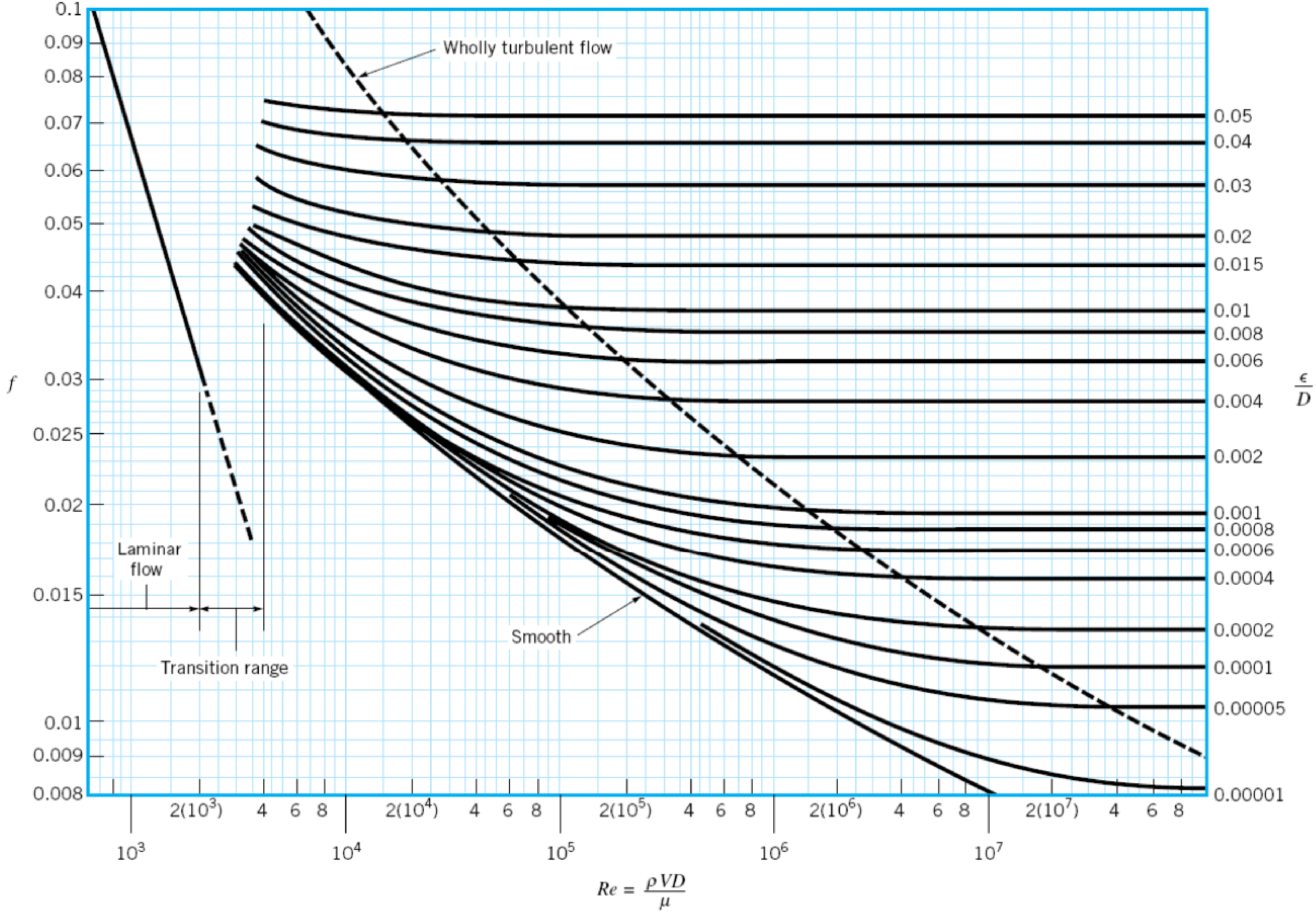
όπου $\gamma = \rho g = 9810$ kg/m/s , $U_1 = Q/A_1 = 2.3$ m/s, $z_1 = 0.0$, $p_2 = 0.0$,

$U_2 = Q/A_2 = 5.86$ m/s και $z_2 = 6$ m και $h_f = f\dfrac{L}{D}\dfrac{U^2}{2g}$

Το h_f υπολογίζεται για L=18 m, D=2 cm, $U=U_1$=2.3 m/s και f=0.0215.
Ο συντελεστής τριβής f υπολογίζεται απευθείας από το διάγραμμα Moody για Re=UD/ν = 45000 και $\varepsilon/D=8*10^{-5}$.

Επομένως η (2) γίνεται $\dfrac{p_1}{\gamma}+\dfrac{2.3^2}{2*9.81}=\dfrac{5.86^2}{2*9.81}+6+0.0215\dfrac{18}{0.02}\dfrac{2.3^2}{2*9.81}$

και τελικά p_1=124.5 kPa.


Wholly turbulent flow
Laminar flow
Transition range
Smooth
f
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.009
0.008
$\frac{\epsilon}{D}$
0.05
0.04
0.03
0.02
0.015
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0001
0.00005
0.00001
10^3
$2(10^3)$
4
6
8
10^4
$2(10^4)$
10^5
$2(10^5)$
10^6
$2(10^6)$
10^7
$2(10^7)$
$Re = \frac{\rho VD}{\mu}$

(γ) Για απώλειες λόγω τριβών και τοπικές απώλειες η εξίσωση ενέργειας γίνεται

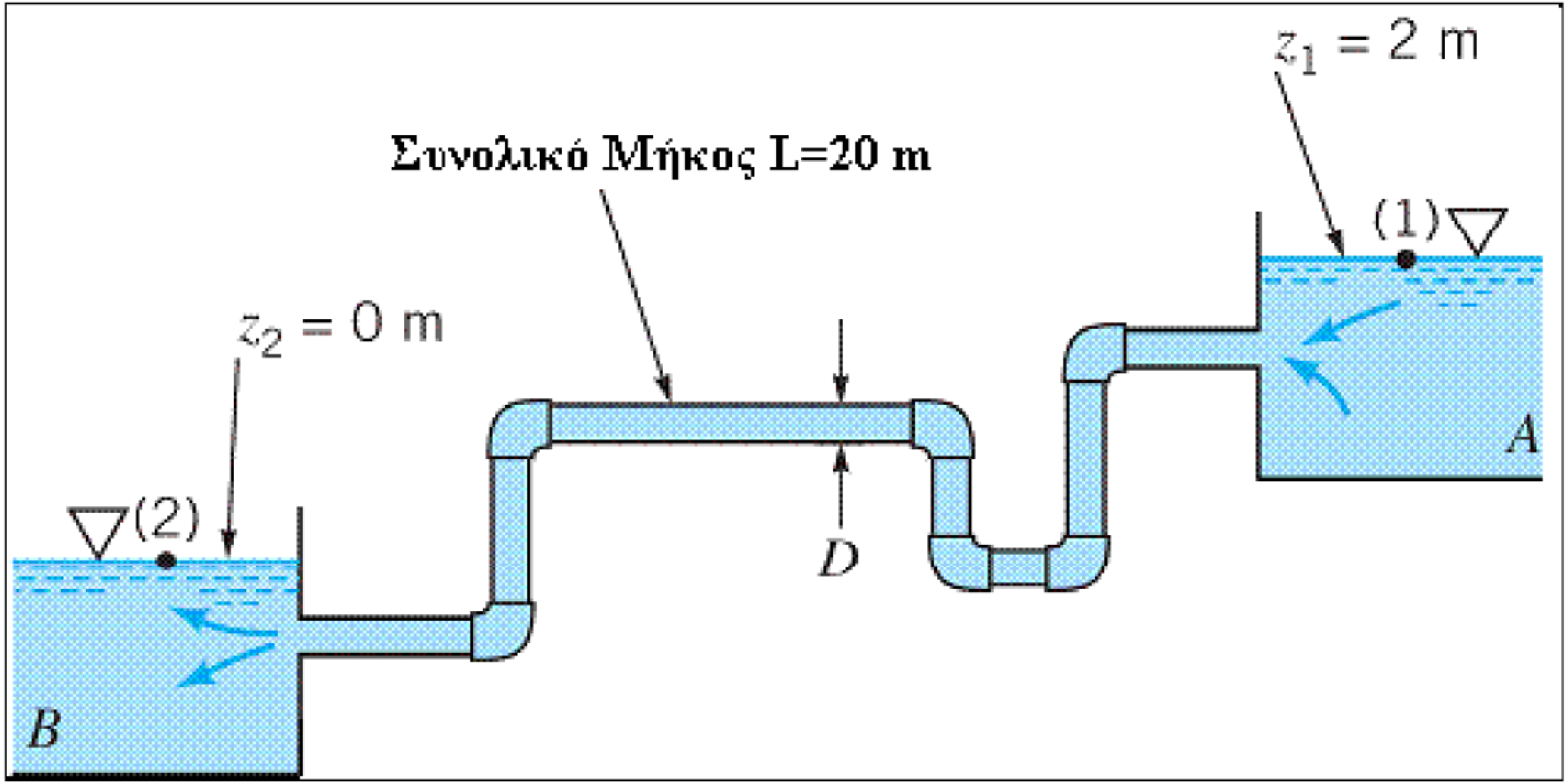
$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2+h_f+\sum h_L$$

Το άθροισμα των τοπικών απωλειών είναι

$$\sum h_L = 4h_{\gamma\omega\nu}+h_{\beta\alpha\nu}+h_{\beta\rho\upsilon}=4*1.5\frac{U_1^2}{2g}+10\frac{U_1^2}{2g}+2\frac{U_1^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \sum h_L = 4.85 \text{ m} \;\; \text{και επομένως} \;\; p_1 = 172 \text{ kPa}$$

Νερό ρέει από την δεξαμενή Α στην δεξαμενή Β με παροχή 0.002 m^3/s. Η τραχύτητα του σωλήνα είναι 0.26 mm. Το σύστημα περιλαμβάνει 6 γωνίες 90^o με πάσσο. Να υπολογισθεί η διάμετρος



Με εφαρμογή της εξίσωσης ενέργειας από το σημείο (1) στο σημείο (2) έχουμε

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2+h_f+h_L \qquad (1)$$

όπου $p_1=p_2=U_1=U_2=z_2=0$ και $h_L = h_{εις} + h_{εξ} + 6h_{γων}$

Η (1) γίνεται

$$z_1=f\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g}+0.5\frac{U^2}{2g}+1.0\frac{U^2}{2g}+6*1.5\frac{U^2}{2g}$$

Οπότε τελικά

$$2=\frac{U^2}{2g}(\frac{20}{D}f+10.5) \qquad (2)$$

$$U = \frac{Q}{A} \Rightarrow U = \frac{Q}{\pi D^2 / 4} \Rightarrow U = \frac{2.55 * 10^{-3}}{D^2} \qquad (3)$$

Η (2) γίνεται $$2 = \frac{(2.55 * 10^{-3})^2}{2gD^4}(\frac{20}{D}f + 10.5) \qquad (4)$$

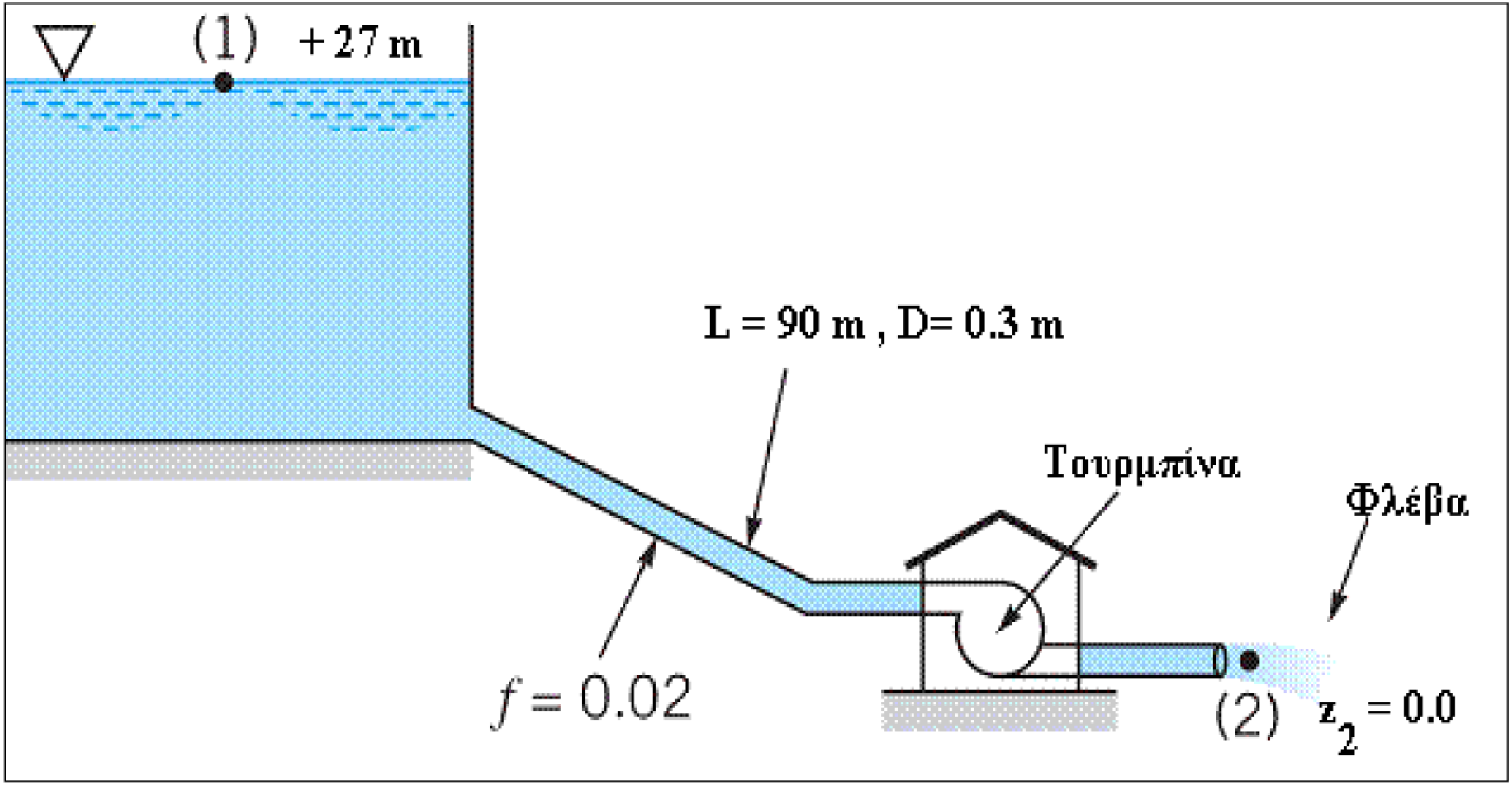
Για τον υπολογισμό του D θα πρέπει να γνωρίζουμε τον συντελεστή τριβής f που είναι συνάρτηση του Re και του ε/D, όπου $Re=UD/\nu = 1.95*10^3/D$ και $\varepsilon/D=2.6*10^{-4}/D$.

Υποθέτουμε D=0.05 m και από την (4) υπολογίζουμε f=0.068, $Re=3.9*10^4$ και $\varepsilon/D=5.2*10^{-3}$.

Για τις παραπάνω τιμές του Re και ε/D το διάγραμμα Moody μας δίνει f=0.033 που διαφέρει σημαντικά από την τιμή 0.068 που υπολογίσθηκε από την (4).

Μετά από νέες δοκιμές υπολογίζουμε τελικά D=0.045 m και f=0.032.

Η τουρμπίνα του σχήματος απορροφά 50 hp από το νερό. Να υπολογισθεί η παροχή.



Η εξίσωση ενέργειας από το (1) στο (2) μας δίνει

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{U_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2+h_f+h_{\tau o \upsilon \rho} \qquad (1) \qquad \text{όπου}$$

γ=ρg=9810 kg/m/s

z_1=27.0 m

p_1= p_2=0.0, U_1=0.0

U_2=U και

z_2=0.0 m

Οι απώλειες h_f υπολογίζονται από την σχέση $h_f = f\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g}$

$$\Rightarrow h_f = 0.02\frac{90}{0.3}\frac{U^2}{2*9.81} = 0.306U^2 \ \text{m}$$

Το φορτίο της τουρμπίνας είναι

$$h_{\tau o \upsilon \rho} = \frac{P_{\tau o \upsilon \rho}}{\gamma Q} = \frac{P_{\tau o \upsilon \rho}}{\rho g(\pi / 4) D^2 U} = \frac{53.77}{U} \mathrm{m}$$

(Η ισχύς 50hp έχει μετατραπεί σε 37285 watt).

Επομένως η (1) γίνεται

$$27 = \frac{U^2}{2*9.81} + 0.306U^2 + \frac{53.77}{U} \quad \Rightarrow \quad 7U^3 - 529.7U + 1055 = 0$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης μας δίνει 2 πραγματικές θετικές ρίζες U_1=2.1 m/s και U_2=7.6 m/s. (Η τρίτη ρίζα είναι αρνητική U_3=9.6 m/s και δεν έχει φυσική σημασία).

Επομένως υπάρχουν δύο αποδεκτές παροχές

$$Q_1 = U_1 \frac{\pi D^2}{4} = 0.148 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{και} \quad Q_2 = U_2 \frac{\pi D^2}{4} = 0.537 \text{ m}^3/\text{s}$$

Οι δύο παραπάνω παροχές δίνουν την ίδια ισχύ P.

Για την παροχή Q_1=0.148 m^3/s έχουμε h_f=1.35 m και $h_{τουρ}$ = 25.6 m. Λόγω της χαμηλής ταχύτητας οι απώλειες είναι σχετικά χαμηλές και επομένως η τουρμπίνα αξιοποιεί ένα σχετικά υψηλό φορτίο.

Για την παροχή Q_1=0.537 m^3/s έχουμε h_f=17.7 m και $h_{τουρ}$ = 7.07 m. Λόγω της υψηλής ταχύτητας οι απώλειες είναι σχετικά μεγάλες και επομένως η τουρμπίνα αξιοποιεί ένα σχετικά χαμηλό φορτίο.

Ανάλογα από την παροχή που θα χρησιμοποιηθεί στο σύστημα εξαρτάται και ο τύπος της τουρμπίνας που θα χρησιμοποιηθεί.