FLOOF FREQUENCY ANALYSIS

Το πρόβλημα που ενδιαφέρει εδώ είναι η περίοδος επανεμφάνισης ή επαναφοράς (return period or recurrence interval) μιας πλημμύρας για κάθε ορισμένο peak discharge, ανάλυση που ξεκινάει από την εκτίμηση της μέσης τιμής του peak. Ο **χρόνος επανεμφάνισης T** για κάθε τιμή του peak Qp υπολογίζεται ως

T=M/N

όπου

N = ο αριθμός των χρόνων παρατήρησης,
M = αριθμός γεγονότων με peak discharge **μεγαλύτερη ή ίση** του Qp

Προφανώς **η πιθανότητα να εμφανιστεί πλημμύρα με peak ίσο ή μεγαλύτερο του Qp** είναι ίση με

P=M/N=1/T.

Όταν δεδομένα απορροής είναι διαθέσιμα για αρκετά χρόνια η ανάλυση συχνότητας πλημμύρας γίνεται με δύο τρόπους:

(I) Basic stage method. Όλα τα peaks που εμφανίστηκαν σε μία περίοδο N χρόνων ταξινομούνται σε ομάδες κατά μέγεθος. Αν μία ορισμένη τιμή του peak έχει εμφανιστεί ή ξεπεραστεί M φορές στα N χρόνια, τότε η περίοδος επανεμφάνισης είναι N/M.
(II) Annual peak method. Τα μέγιστα ετήσια peaks τοποθετούνται σε φθίνουσα σειρά για την περίοδο παρατήρησης των N χρόνων. Το μεγαλύτερο από τα μέγιστα ετήσια peaks έχει περίοδο επανεμφάνισης N χρόνων, το 2ο μεγαλύτερο έχει περίοδο επανεμφάνισης N/2 χρόνων, κ.τ.λ. Το M-οστό κατά σειρά μέγιστο ετήσιο peak έχει περίοδο M/N.

Αυτές οι αναλύσεις δίνουν το return period T για κάθε Qp, με εκτιμήσεις που βασίζονται σε παρατηρήσεις διάρκειας N χρόνων, που τυπικά αντιστοιχά σε μερικές δεκαετίες. Ακραία φαινόμενα, για τα οποία το return period T είναι μεγάλο, και ίσως και πιο μεγάλο από N, αλλά η πιθανότητά τους 1/T δεν είναι ασήμαντη, εκτιμώνται θεωρητικά με τη μέθοδο Gumbel: από τα δεδομένα των παρατηρήσεων προσδιορίζουμε τις παραμέτρους της κατανομής κατά Gumbel και από αυτήν μπορούμε να προβλέψουμε το return period για κάθε τιμή του peak discharge, και επομένως και των ακραίων τιμών.

Προτού περάσουμε στη μέθοδο Gumbel να κάνουμε μερικούς συλλογισμούς πάνω στην πιθανότητα επανεμφάνισης μίας πλημμύρας (το οποίο πάντα σημαίνει την επανεμφάνιση μιας ορισμένης τιμής του peak discharge): αν T είναι το return period για μια πλημμύρα Qp τότε

1. Πιθανότητα (Qp θα ξεπεραστεί (ή θα εξισωθεί) σε κάθε ορισμένη χρονιά): $P = \frac{1}{T}$
2. Πιθανότητα (Qp δε θα ξεπεραστεί σε κάθε ορισμένη χρονιά): $P' = 1 - \frac{1}{T}$
3. Πιθανότητα (Qp δε θα ξεπεραστεί σε n διαδοχικές χρονιές): $(P')^n = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n$
4. **Ρίσκο R** είναι η πιθανότητα (Qp θα ξεπεραστεί (ή θα εξισωθεί) σε n διαδοχικές χρονιές): $R = 1 - (P')^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n$

Παράδειγμα 1. What return period must a highway engineer use in designing a critical underpass drain to accept only a 10 percent risk that flooding will occur in the next 5 years?

Λύση: $R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \rightarrow 0.1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^5 \rightarrow T = 48 \text{ years}$

Με το απλό αυτό παράδειγμα βλέπουμε πως το ρίσκο συνδέεται αποκλειστικά με πληροφορίες διάρκειας. Στη συνέχεια η περίοδος επαναφοράς συνδέεται με το *μέγεθος* της πλημμύρας, διαμέσου της μοντελοποιήσης της σχέσης μεγέθους-περιόδου των πλημμυρών για κάθε συγκεκριμένο υδατόρευμα, με τη μέθοδο Gumbel.

ΜΕΘΟΔΟΣ GUMBEL

Για μία πλημμύρα (με peak discharge) Qp η πιθανότητα P να ξεπεραστεί σε μία χρονιά δίνεται από

$$P = 1 - e^{-B} \quad \text{όπου} \quad B = \exp\left\{-\left[\frac{Q_p - \overline{Q_p}}{0.78\sigma} + 0.577\right]\right\}$$

όπου $\overline{Q_p}$ είναι η μέση τιμή των τιμών του peak discharge που εμφανίστηκαν σε μία μεγάλη χρονικλη περίοδο και σ είναι η τυπική απόκλιση.

Παράδειγμα 2.
Η ανάλυση των annual flood peaks σε ένα ποτάμι σε μία περίοδο 60 χρόνων δείχνει ότι η μέση τιμή των annual peaks είναι 2264 m3/s και η τυπική απόκλιση είναι 340 m3/s.
(α) Βρείτε την πιθανότητα οι πλημμύρες τον επόμενο χρόνο να ξεπεράσουν τα 3170 m3/s.
(β) Ποια είναι η περίοδος επαναφοράς αυτής της πλημμύρας;
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον μία πλημμύρα τέτοιου μεγέθους να συμβεί στα επόμενα 25 χρόνια;
(δ Ποιο είναι το μέγεθος (peak discharge) μιας πλημμύρας με return period 20 χρόνια;

Λύση:
(α)

$$B = \exp\left\{-\left[\frac{3179 - 2264}{0.78 \times 340} + 0.577\right]\right\} = 0.018439$$

$$P = 1 - e^{-B} = P = 1 - e^{-0.018439} = 0.0183 = 1.83\%$$

(β)

T=1/P=54.7 χρόνια

(γ)

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{54.7}\right)^{25} = 0.369 = 36.9\%$$

(δ)

Έχουμε

$$P = 1 - e^{-B} \Rightarrow \boxed{B = -\ln(1-P) = -\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)}$$

$$\Rightarrow B = -\ln\left(1 - \frac{1}{20}\right) = 0.05129$$

και

$$B = \exp\left\{-\left[\frac{Q_p - \overline{Q_p}}{0.78\sigma} + 0.577\right]\right\} \Rightarrow \frac{Q_p - \overline{Q_p}}{0.78\sigma} + 0.577 = -\ln B \Rightarrow \boxed{Q_p = \overline{Q_p} + (-0.78\ln B - 0.45)\sigma}$$

$$\Rightarrow Q_p = 2264 + (-0.78\ln 0.05139 - 0.45) \times 340$$

$$\Rightarrow Q_p = 2899\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

Παράδειγμα 3.
Για ένα χείμαρρος έχουμε τα εξής στοιχεία πλημμύρας: για περίοδο επαναφοράς 50 χρόνων το peak discharge είναι 20600 m3/s και για περίοδο επαναφοράς 100 χρόνων το peak discharge είναι 22150 m3/s. Να εκτιμήσετε την πλημμύρα περιόδου επαναφοράς 500 χρόνων.

Λύση:
Από τις σχέσεις που βρήκαμε στην προηγούμενη άσκηση

$$B = -\ln(1-P) = -\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right), \qquad Q_p = \overline{Q_p} + K\sigma \qquad K = (-0.78\ln B - 0.45)$$

μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή και την απόκλιση των πλημμυρών και στη συνέχεια να απαντήσουμε το ερώτημα. Η ποσότητα ***K*** που ορίσαμε εδώ ένας **frequency factor** που χρησιμοποιείται συχνά στις εφαρμογές της μεθόδου Gumbel.

Βρίσκουμε

T (years)	Qp (m3/s)	*B*	*K*
50	20600	0.020203	2.593512
100	22150	0.01005	3.138116

Επομένως έχουμε

$$20600 = \overline{Q_p} + 2.593512\sigma$$

$$22150 = \overline{Q_p} + 3.138116\sigma$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = 2846\,\mathrm{m3/s} \qquad \overline{Q_p} = 13219\,\mathrm{m3/s}$$

Για *T*=500 χρόνια βρίσκουμε *B*=0.002002 και *K*=4.396614 οπότε έχουμε $Q_p = \overline{Q_p} + K\sigma$ =25732 m3/s.

Παράδειγμα 4.
Να βρεθεί η πιθανότητα να συμβεί (εξισωθεί ή ξεπεραστεί) το πολύ δύο φορές σε 50 χρόνια μία πλημμύρα περίοδου επαναφοράς 100 χρόνων.

Λύση:
Το πρόβλημα αυτό είναι μία εφαρμογή της διωνυμικής κατανομής με πιθανότητα πραγματοποίησης του συμβάντος σε κάθε δοκιμή (δηλαδή κάθε χρόνο) ίση με 1/T=1/100:

$$P = C_0^{50}\left(\frac{1}{T}\right)^0\left(1-\frac{1}{T}\right)^{50} + C_1^{50}\left(\frac{1}{T}\right)^1\left(1-\frac{1}{T}\right)^{49} + C_2^{50}\left(\frac{1}{T}\right)^2\left(1-\frac{1}{T}\right)^{48} = 0.986 = 98.6\%$$

όπου $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής.

Παράδειγμα 5.
Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας annual flood peaks για ένα ποταμό σε μία περίοδο 30 χρόνων. Οι τιμές παρουσιάζονται σε φθίνουσα σειρά. Να βρεθεί το μέγεγος της πλημμύρας με περίοδο επαναφοράς 1000 χρόνων.

m	*Q*	*m*	*Q*	*m*	*Q*
1	2294	11	1095	21	675
2	1880	12	915	22	467
3	1850	13	889	23	467
4	1700	14	869	24	392
5	1500	15	867	25	371
6	1466	16	860	26	325
7	1395	17	792	27	288
8	1366	18	720	28	212
9	1175	19	693	29	170
10	1100	20	675	30	120

Λύση:
Το πρόβλημα θα το λύσουμε με **γραφική μέθοδο** που λειτουργεί διαμέσου των **plotting position formulas** οι οποίες υλοποιούν γραφικά την αντίστοιχη στατιστική κατανομή (στην περιπτωσή μας, την κατανομή Gumbel).

Distributions	*Recommended plotting position formula*	*Form of the plotting position formulae* $F(X \le x) = 1 - \frac{1}{T}$
Normal and Lognormal	Blom	$(i - 0.375)/(N + 0.25)$
Gumbel EV-I	Gringorton	$(i - 0.4)/(N + 0.12)$
Any distribution	Weibull	$i/(N + 1)$
PT3 and LP3	Cunnane	$(i - 0.4)/(N + 0.2)$

Ο δείκτης *i* είναι ο δείκτης **αύξουσας αρίθμησης**. *N* είναι το πλήθος των μετρήσεων του δείγματος (εδώ είναι *N*=30). Ο τύπος παράγει ουσιαστικά την **πιθανότητα μή εμφάνισης πλημμύρας μεγαλύτερης του *Q***

αντίστοιχου στο κάθε δεδομένο *i*. Η ιδέα τώρα είναι ότι αν κάνουμε τη γραφική παράσταση του *Q* ως συνάρτηση του **variate** της κατανομής που μας ενδιαφέρει, που στην περίπτωση της κατανομής Gumbel είναι

$$\text{variate} = -\ln B = -\ln\left[-\ln\left(1-\frac{1}{T}\right)\right] = -\ln(-\ln P')$$

το γράφημα θα προκύψει (κατά προσέγγιση) ευθεία που ποσοτικοποιείται με γραμμική παραμβολή. Η ευθεία αυτή στη συνέχεια επεκτείνεται (extrapolation) για να βρούμε την πλημμύρα της περιόδου επαναφοράς που μας ενδιαφέρει.

Η λύση υλοποιείται στο **Excel (flood-2.xls).** Βρίσκουμε

$$Q \sim 451.21 \times (\text{variate}) + 665.6$$

Για T=1000 βρίσκουμε: variate=6.907255 και, διαμέσου της σχέσης της ευθείας που προέκυψε, ότι η πλημμύρα αυτή είναι Q=3780 m3/s.

Παράδειγμα 6.
Να λυθεί το παράδειγμα 5 με τον αναλυτικό τρόπο (αντίστοιχα με το παράδειγμα 2), υπολογίζοντας πρώτα τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της σειράς των Q.

Λύση:
Βρίσκουμε

$$\sigma = 561.8827\,\text{m3/s} \qquad \overline{Q_p} = 919.6\,\text{m3/s}$$

Εφαρμοζουμε τώρα τις σχέσεις

$$B = -\ln(1-P) = -\ln\left(1-\frac{1}{T}\right), \qquad Q_p = \overline{Q_p} + K\sigma$$

Ο συντελεστής συχνότητας K για το γενικό (πεπερασμένο) δείγμα μεγέθους N γράφεται

$$K = \frac{-\ln B - y_N}{s_N}$$

Για πολύ μεγάλο δείγμα έχουμε ότι

$$y_N \to 0.577 \quad , \quad 1/s_N \to 0.78$$

όποτε παίρνουμε πίσω τον τύπο για το K που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα 3. Για το γενικό N, το **reduced mean y_N** και το **reduced standard deviation s_N** μπορούν να βρεθούν από τους παρακάτω πίνακες.

Για N=30, βρίσκουμε y_{30}=0.5362 και $1/s_{30}$=0.8990 και ο συντελεστής συχνότητας K γράφεται

$$K = 0.8990 \times (-\ln B) - 0.4820$$

Για T=1000 έχουμε ότι –lnB=6.907255. Αυτό δίνει Q=4137 m3/s.
Αν χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των y_N και s_N για το άπειρο δείγμα βρίσκουμε Q=3690 m3/s.
Συμπεραίνουμε ότι η γραφική μέθοδος παράγει αποτελέσματα κοντά στο άπειρο δείγμα, δηλαδή χωρίς τις διορθώσεις του πεπερασμένου δείγματος.

Reduced mean y_N

N	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
10	0.4952	0.4996	0.5035	0.507	0.51	0.5128	0.5157	0.5181	0.5202	0.522
20	0.5236	0.5252	0.5268	0.5283	0.5296	0.5309	0.532	0.5332	0.5343	0.5353
30	0.5362	0.5371	0.5380	0.5388	0.5396	0.5402	0.5410	0.5418	0.5424	0.5430
40	0.5436	0.5442	0.5448	0.5453	0.5458	0.5463	0.5468	0.5473	0.5477	0.5481
50	0.5485	0.5489	0.5493	0.5497	0.5501	0.5504	0.5508	0.5511	0.5515	0.5518
60	0.5521	0.5524	0.5527	0.5530	0.5533	0.5535	0.5538	0.5540	0.5543	0.5545
70	0.5548	0.5550	0.5552	0.5555	0.5557	0.5559	0.5561	0.5563	0.5565	0.5567
80	0.5569	0.5570	0.5572	0.5574	0.5576	0.5578	0.5580	0.5581	0.5583	0.5585
90	0.5586	0.5587	0.5589	0.5591	0.5592	0.5593	0.5595	0.5596	0.5598	0.5599
100	0.56									

Reduced standard deviation s_N

N	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
10	0.9496	0.9676	0.9833	0.9971	1.0095	1.0206	1.0316	1.0411	1.0493	1.0565
20	1.0628	1.0696	1.0754	1.0811	1.0864	1.0915	1.0961	1.1004	1.1047	1.1086
30	1.1124	1.1159	1.1193	1.1226	1.1255	1.1285	1.1313	1.1339	1.1363	1.1388
40	1.1413	1.1436	1.1458	1.1480	1.1499	1.1519	1.1538	1.1557	1.1574	1.1590
50	1.1607	1.1623	1.1638	1.1658	1.1667	1.1681	1.1696	1.1708	1.1721	1.1734
60	1.1747	1.1759	1.1770	1.1782	1.1793	1.1803	1.1814	1.1824	1.1834	1.1844
70	1.1854	1.1863	1.1873	1.1881	1.1890	1.1898	1.1906	1.1915	1.1923	1.1930
80	1.1938	1.1945	1.1953	1.1959	1.1967	1.1973	1.1980	1.1987	1.1994	1.2001
90	1.2007	1.2013	1.2020	1.2026	1.2032	1.2038	1.2044	1.2049	1.2055	1.2060
100	1.2065									