6 – Νόμοι της κίνησης II

6.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ NEWTON ΣΤΗΝ ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στο Υποκεφάλαιο 4.4 βρήκαμε ότι ένα σώμα που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με σταθερό μέτρο ταχύτητας υ υπόκειται σε επιτάχυνση που έχει μέτρο

$$a_r = \frac{\upsilon^2}{r}$$

Επειδή το διάνυσμα τής ταχύτητας, $\boldsymbol{\upsilon}$, μεταβάλλει διεύθυνση συνεχώς κατά τη διάρκεια τής κίνησης, το διάνυσμα τής επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}_r$, κατευθύνεται πάντοτε προς το κέντρο τού κύκλου και γι' αυτό ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση. Επί πλέον, η επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_r$ είναι συνεχώς κάθετη στο διάνυσμα τής ταχύτητας, $\boldsymbol{\upsilon}$.

Θεωρήστε μια σφαιρική μάζα m, δεμένη με νήμα μήκους r την οποία περιστρέφουμε σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1. Η σφαίρα εκτελεί κυκλική τροχιά και ας υποθέσουμε ότι το μέτρο τής ταχύτητάς της είναι σταθερό. Η αδράνεια τής μάζας τήν κάνει να τείνει να διατηρήσει ευθύγραμμη τροχιά, αλλά η τάση τού νήματος τήν εμποδίζει να ακολουθήσει ευθύγραμμη πορεία, γιατί περιορίζει την απόσταση τής σφαίρας από το κέντρο· έτσι ασκεί πάνω στη σφαίρα δύναμη που τήν υποχρεώνει να κάνει κυκλική τροχιά. Η δύναμη κατευθύνεται προς το κέντρο τού κύκλου, πάνω σε μια ευθεία που συμπίπτει με τη διεύθυνση τού νήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1. Αποτελεί αντιπροσωπευτικό παράδειγμα μιας τάξης δυνάμεων τών οποίων το κινητικό αποτέλεσμα φέρει τη γενική ονομασία **κεντρομόλος δύναμη.** Εάν εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton στην ακτινική κατεύθυνση, βρίσκουμε ότι η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη είναι

$$F_r = ma_r = m\frac{v^2}{r} \tag{6.1}$$

Η κεντρομόλος δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση τής κεντρομόλου επιτάχυνσης, δηλαδή δρα προς το γεωμετρικό κέντρο τής κυκλικής τροχιάς τού σώματος· έτσι μεταβάλλει συνεχώς την κατεύθυνση τής ταχύτητας. Οι δυνάμεις που, καμιά φορά, παίζουν τον ρόλο τής κεντρομόλου είναι δυνάμεις σαν όλες τις άλλες που μελετήσαμε μέχρι τώρα. Απλώς η ονομασία *κεντρομόλος* δείχνει ότι *η δύναμη κατευθύνεται προς το κέντρο τής κυκλικής τροχιάς*. Στο παράδειγμα που μελετούμε, η τάση τού νήματος είναι η κεντρομόλος δύναμη. Στην περίπτωση ενός δορυφόρου που κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, κεντρομόλος είναι η βαρυτική δύναμη. Στην περίπτωση ενός αυτοκινήτου που κινείται γύρω-γύρω σε μια επίπεδη πλατεία, κεντρομόλος είναι η δύναμη τής τριβής ανάμεσα στα λάστιχα και στην άσφαλτο κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1 Πόσο γρήγορα στριφογυρίζει;

Μια μπάλλα μάζας 0.5 kg είναι δεμένη στην άκρη ενός νήματος μήκους 1.5 m. Η μπάλλα στροφογυρίζει σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2. Εάν η μέγιστη τάση που αντέχει το νήμα είναι 50 N, ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα την οποία μπορεί να έχει η μπάλλα προτού σπάσει το νήμα;

Λύση Η κεντρομόλος δύναμη είναι αυτή καθ' εαυτήν η τάση τού νήματος. Έτσι, από την Εξίσωση 6.1 έχουμε

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

Λύνουμε ως προς το v και βρίσκουμε

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

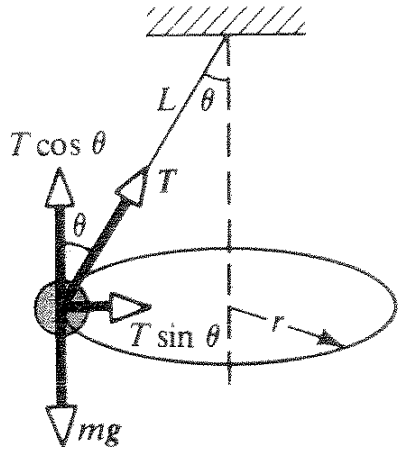
Η μέγιστη ταχύτητα την οποία μπορεί να έχει η μπάλλα αντιστοιχεί στη μέγιστη τάση στην οποία αντέχει το νήμα. Επομένως,

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max} r}{m}} = \sqrt{\frac{(50\ \text{N})(1.5\ \text{m})}{0.5\ \text{kg}}} = 12.2\ \text{m/s}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2 Το κωνικό εκκρεμές

Ένα μικρό σώμα μάζας m κρέμεται από μια κλωστή μήκους L. Το σώμα περιστρέφεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.3. Η κλωστή διαγράφει την επιφάνεια ενός κώνου, γι' αυτό ονομάζουμε το σύστημα *κωνικό εκκρεμές*. Βρείτε την ταχύτητα τού σώματος και την περίοδο περιστροφής T_p.

Λύση Στο Σχήμα 6.3 βλέπετε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος, όπου αναλύσαμε την τάση $\boldsymbol{T}$ τού νήματος σε μία κατακόρυφη συνιστώσα $T\cos\theta$ και μία



Σχήμα 6.3 (Παράδειγμα 6.2) Το κωνικό εκκρεμές και το αντίστοιχο διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος.

οριζόντια $T\sin\theta$ με κατεύθυνση το κέντρο τής κυκλικής τροχιάς τού σώματος. Επειδή δεν υπάρχει επιτάχυνση στην κατακόρυφη διεύθυνση, η κατακόρυφη συνιστώσα τής τάσης εξισορροπείται από το βάρος. Επομένως

$$(1)\qquad T\cos\theta = mg$$

Η οριζόντια συνιστώσα $T\sin\theta$ τής τάσης μάς δίνει την κεντρομόλο δύναμη. Έτσι, εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton και έχουμε

$$(2)\qquad T\sin\theta = ma_r = \frac{mv^2}{r}$$

Διαιρούμε την (2) με την (1), απαλείφουμε την T και βρίσκουμε

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Αλλά από τη γεωμετρία τού προβλήματος ξέρουμε ότι $r = L\sin\theta$. Επομένως

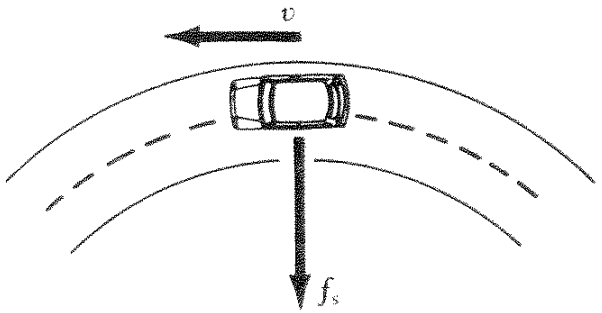
$$v = \sqrt{rg\tan\theta} = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$$

Η περίοδος περιστροφής T_p (μην τή συγχέετε με την τάση T) είναι

$$(3)\qquad T_p = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{rg\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.3 Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα τού αυτοκινήτου;

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1 500 kg κινείται πάνω σε επίπεδο δρόμο και προσπαθεί να πάρει μια στροφή ακτίνας καμπυλότητας 35 m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.4. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στα



Σχήμα 6.4 (Παράδειγμα 6.3) Η δύναμη τής στατικής τριβής κατευθύνεται προς το κέντρο καμπυλότητας τού κυκλικού τόξου. Έτσι συγκρατεί το αυτοκίνητο στην κυκλική διαδρομή του.

λάστιχα και στην άσφαλτο είναι 0.50, ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί το αυτοκίνητο να πάρει τη στροφή με ασφάλεια;

Λύση Η δύναμη τής στατικής τριβής κρατά το αυτοκίνητο σε κυκλική τροχιά. Έτσι, από την Εξίσωση 6.1, έχουμε

$$(1) \qquad f_s = m\frac{v^2}{r}$$

Η μέγιστη ταχύτητα την οποία μπορεί να έχει το αυτοκίνητο είναι εκείνη που, αν τήν ξεπεράσει λίγο, θα αρχίσει να ολισθαίνει προς τα έξω. Τη στιγμή αυτή η δύναμη τής τριβής έχει τη μέγιστη τιμή της

$$f_{s\,\max} = \mu N$$

Στην περίπτωσή μας η κάθετη δύναμη είναι ίση με το βάρος, δηλαδή

$$f_{s\,\max} = \mu mg = (0.5)(1500\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 7350\ \text{N}$$

Θέτουμε την τιμή αυτή στην (1) και βρίσκουμε ότι η μέγιστη ταχύτητα είναι

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{f_{s\,\max} r}{m}} = \sqrt{\frac{(7350\ \text{N})(35\ \text{m})}{1500\ \text{kg}}} = 13.1\ \text{m/s}$$

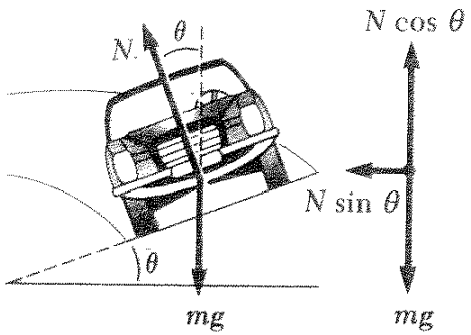
Άσκηση 2 Μια βροχερή ημέρα, το αυτοκίνητο τού παραδείγματός μας ολισθαίνει όταν η ταχύτητά του φθάσει τα 8 m/s. Βρείτε τον συντελεστή στατικής τριβής στην περίπτωση αυτή (βρεγμένη άσφαλτος).
Απάντηση 0.187.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4 Έξοδος αυτοκινητοδρόμου με κλίση

Ένας μηχανικός θέλει να σχεδιάσει μια έξοδο αυτοκινητοδρόμου. Προτίθεται να τής δώσει την κατάλληλη κλίση ώστε τα αυτοκίνητα να μην εξαρτώνται από την τριβή για να μην ολισθαίνουν όταν παίρνουν τη στροφή. Υποθέστε ότι σκοπεύει να σχεδιάσει την έξοδο με ακτίνα καμπυλότητας 50 m και θέλει να μπορούν τα αυτοκίνητα να παίρνουν τη στροφή με ταχύτητα 30 mi/h (13.4 m/s). Υπολογίστε τη γωνία κλίσης τής εξόδου.

Λύση Σε έναν επίπεδο δρόμο η τριβή, ανάμεσα στα λάστιχα και στην άσφαλτο, δίνει την αναγκαία κεντρομόλο δύναμη. Όταν όμως ο δρόμος έχει γωνία κλίσης θ, όπως στο Σχήμα 6.5, η κάθετη δύναμη N έχει οριζόντια συνιστώσα $N \sin \theta$ με κατεύθυνση το κέντρο τού τόξου τού κύκλου το οποίο διανύει το αυτοκίνητο. Υποθέτουμε ότι μόνο η $N \sin \theta$ συνεισφέρει στην κεντρομόλο δύναμη. Επομένως θα υπολογίσουμε την αναγκαία κλίση για την περίπτωση που *δεν χρειαζόμαστε καθόλου τριβή*. Δηλαδή, ένα αυτοκίνητο να μπορεί να κινείται με τη δεδομένη ταχύτητα τών 13.4 m/s και να κάνει τη στροφή ακόμη και αν η άσφαλτος έχει καλυφθεί με πάγο! Γράφουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton και έχουμε

$$(1) \qquad N \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$$



Σχήμα 6.5 (Παράδειγμα 6.4) Κάτοψη ενός αυτοκινήτου καθώς παίρνει την στροφή σε δρόμο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Εάν αγνοήσουμε την τριβή, η οριζόντια συνιστώσα τής κάθετης δύναμης δίνει την κεντρομόλο δύναμη. Σημειώστε ότι η N είναι το *άθροισμα* τών δυνάμεων που δρουν πάνω στους τέσσερεις τροχούς τού αυτοκινήτου.

Επειδή το αυτοκίνητο ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, έχουμε $\Sigma F_y = 0$, έτσι

$$(2) \qquad N \cos \theta = mg$$

Διαιρούμε την (1) δια τής (2) και έχουμε

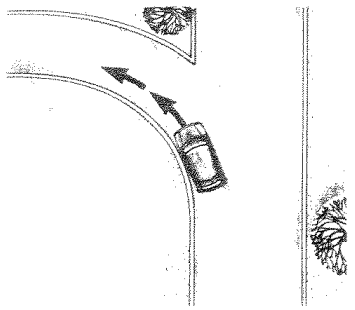
$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(13.4 \text{ m/s})^2}{(50 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)}\right] = 20.1^\circ$$

*6.3 ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Όταν εξετάσαμε τους νόμους τού Newton στο Κεφάλαιο 5, τονίσαμε ότι οι νόμοι αυτοί ισχύουν για μετρήσεις που γίνονται σε ένα *αδρανειακό σύστημα αναφοράς*. Στο μέρος τούτο θα αναλύσουμε πώς θα εφαρμόσει τους νόμους τού Newton ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς (δηλαδή σε ένα σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται).

Εάν ένα σώμα επιταχύνεται με επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$, ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή, τότε οπωσδήποτε ο αδρανειακός παρατηρητής μπορεί να χρησιμοποιήσει τους νόμους τού Newton και να εφαρμόσει την $\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Για να μπορέσει ένας μη αδρανειακός παρατηρητής να εφαρμόσει τον δεύτερο νόμο τού Newton για την κίνηση τού σώματος, πρέπει να εισαγάγει *πλασματικές* (υποθετικές) δυνάμεις για να καταλήξει σε σωστά αποτελέσματα από την εφαρμογή τού δεύτερου νόμου τού Newton στο σύστημα αυτό. Καμιά φορά, αυτές οι πλασματικές δυνάμεις λέγονται *δυνάμεις αδράνειας*. Θέλουμε έτσι να δώσουμε έμφαση στο ότι οι δυνάμεις αυτές είναι πλασματικές. Ο μη αδρανειακός παρατηρητής υποθέτει την ύπαρξή τους για να εξηγήσει πραγματικά φαινόμενα, καθώς χρησιμοποιεί νόμους που ισχύουν μόνο σε αδρανειακά συστήματα. Έτσι οι υποθετικές, πλασματικές αυτές δυνάμεις φαίνονται ότι είναι πραγματικές όταν τίς μελετούμε σε επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς. Δεν υπάρχει όμως κανένας λόγος εισαγωγής τών πλασματικών αυτών δυνάμεων όταν μελετούμε κίνηση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Οι υποθετικές αυτές δυνάμεις είναι χρήσιμες μόνο σε μη αδρανειακά συστήματα και δεν περιγράφουν «πραγματικές» δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα τού οποίου την κίνηση μελετούμε. Όταν λέμε «πραγματικές» δυνάμεις εννοούμε τις δυνάμεις που είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης τού σώματος με το περιβάλλον του. *Εάν οριστούν σωστά οι πλασματικές αυτές δυνάμεις στο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε η περιγραφή τής κίνησης στο μη αδρανειακό σύστημα είναι ισοδύναμη με την περιγραφή τής ίδιας κίνησης σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπου μόνο πραγματικές δυνάμεις λαμβάνονται υπ' όψιν.* Συνήθως μελετούμε κινήσεις χρησιμοποιώντας αδρανειακά συστήματα, υπάρχουν όμως μερικές σπάνιες περιπτώσεις κατά τις οποίες είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε συστήματα αναφοράς τα οποία επιταχύνονται.



Σχήμα 6.10 Ένα αυτοκίνητο πλησιάζει στην έξοδο τού αυτοκινητοδρόμου.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την κίνηση ενός συστήματος αναφοράς που περιστρέφεται ας θεωρήσουμε ότι ένα αυτοκίνητο τρέχει σε έναν αυτοκινητόδρομο από τον οποίο πρέπει να βγει ακολουθώντας τη λωρίδα εξόδου που κάνει στροφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.10. Καθώς το αυτοκίνητο κάνει στροφή προς τα αριστερά για να βγει από τον αυτοκινητόδρομο, ο συνεπιβάτης τού οδηγού θα γλιστρήσει προς το δεξιό μέρος τού καθίσματος και θα πέσει πάνω στην πόρτα. Η δύναμη που ασκεί η πόρτα επάνω του τόν συγκρατεί μέσα στο αυτοκίνητο. Ποια είναι η αιτία που κάνει τόν επιβάτη να γλιστρήσει προς την πόρτα; Μια πολύ διαδεδομένη αλλά όχι *αρμόζουσα* εξήγηση είναι ότι μια μυστηριώδης δύναμη τόν σπρώχνει προς τα έξω. (Αυτή η δύναμη συχνά αποκαλείται «φυγόκεντρος» δύναμη, αλλά εμείς δεν θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο αυτό, διότι πολύ συχνά συγχέει τα πράγματα αντί να τά εξηγεί). Ο επιβάτης επινοεί την πλασματική αυτή δύναμη για να εξηγήσει τί συμβαίνει στο σύστημα αναφοράς του, το οποίο επιταχύνεται.

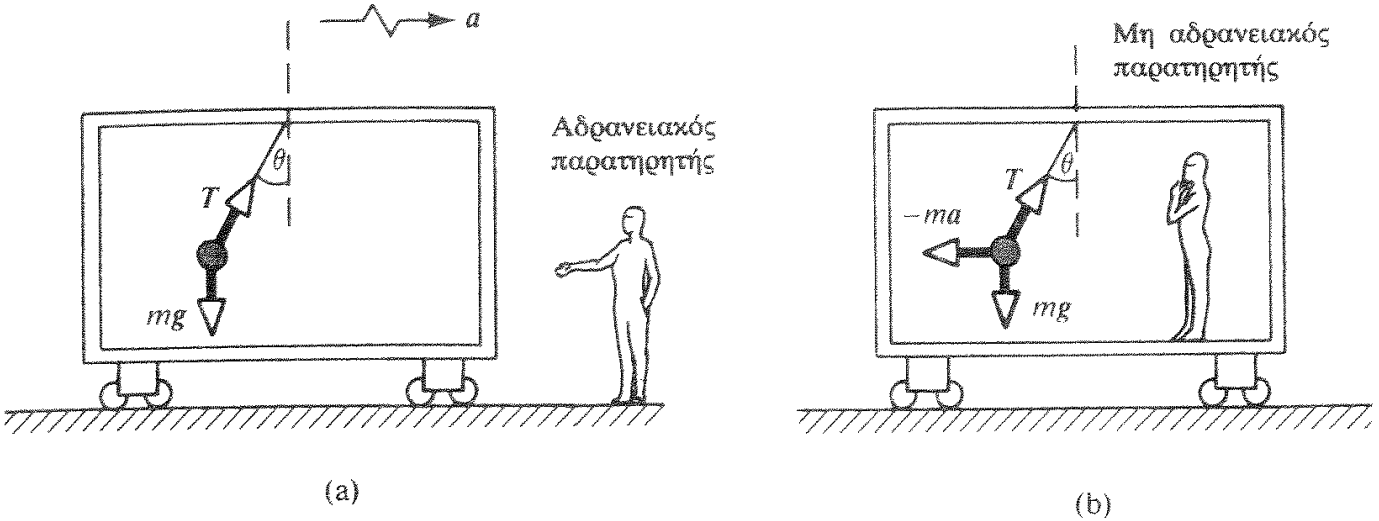
Η ορθή εξήγηση τού φαινομένου αυτού είναι η ακόλουθη: Προτού στρίψει το αυτοκίνητο για να αρχίσει να ακολουθεί τη στροφή εξόδου, ο επιβάτης κινείται ευθύγραμμα. Καθώς το αυτοκίνητο αρχίζει να στρίβει, ο επιβάτης, λόγω τής αδράνειας, τείνει να εξακολουθήσει να κινείται πάνω στην αρχική ευθύγραμμη τροχιά. Αυτό είναι συνέπεια τού πρώτου νόμου τού Newton, σύμφωνα με τον οποίο φυσική τάση ενός σώματος είναι να εξακολουθήσει να κινείται ευθύγραμμα. Πάντως, εάν μια αρκετά μεγάλη κεντρομόλος δύναμη (η οποία όπως θα θυμάστε κατευθύνεται προς το κέντρο καμπυλότητας) δράσει πάνω στον επιβάτη, αυτός θα εξακολουθήσει να κινείται σε καμπύλη τροχιά μαζί με το αυτοκίνητο. Η κεντρομόλος αυτή δύναμη δεν είναι τίποτε άλλο παρά η τριβή ανάμεσα στον επιβάτη και το κάθισμά του. Εάν η δύναμη τής τριβής δεν είναι επαρκής, ο επιβάτης θα γλιστρήσει από το κάθισμα καθώς από κάτω του το αυτοκίνητο στρίβει. Τελικά, ο επιβάτης θα πέσει πάνω στην πόρτα, η οποία δημιουργεί αρκετή τριβή (αντίσταση) ώστε ο επιβάτης να ακολουθεί πια την ίδια καμπύλη τροχιά με το αυτοκίνητο.

Η αιτία που ο επιβάτης γλιστρά προς την πόρτα δεν είναι καμιά μυστηριώδης δύναμη που δρα προς τα έξω· απλώς, *η κεντρομόλος που ασκείται επάνω του δεν είναι επαρκής ώστε να τόν κρατήσει στην καμπύλη τροχιά που ακολουθεί το αυτοκίνητο.*

Ας ανακεφαλαιώσουμε: πρέπει να είστε πολύ προσεκτικοί και να διακρίνετε τις πραγματικές δυνάμεις από τις πλασματικές, όταν περιγράφετε κινήσεις σε επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς. Ένας παρατηρητής μέσα σε ένα αυτοκίνητο το οποίο κάνει στροφή βρίσκεται σε επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς και πρέπει να επινοήσει, να πλάσει, δηλαδή, μια υποθετική δύναμη που κατευθύνεται προς τα έξω για να εξηγήσει γιατί πέφτει πάνω στην πόρτα. Ένας ακίνητος παρατηρητής έξω από το αυτοκίνητο (προφανώς είναι αδρανειακός) λαμβάνει ύπ' όψιν μόνον τις πραγματικές δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω στον επιβάτη τού αυτοκινήτου. Για τον αδρανειακό παρατηρητή *δεν υπάρχει* μυστηριώδης δύναμη με κατεύθυνση προς τα έξω. Η μόνη πραγματική εξωτερική δύναμη (εκτός από το βάρος τού επιβάτη) που υπάρχει είναι η κεντρομόλος δύναμη που κατευθύνεται προς το κέντρο καμπυλότητας και οφείλεται στην τριβή με το κάθισμα ή στην κάθετη δύναμη τής πόρτας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.8 Γραμμικό επιταχυνσίμετρο

Μια μικρή σφαίρα μάζας m είναι αναρτημένη από την οροφή ενός επιταχυνόμενου σιδηροδρομικού βαγονιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.11. Σύμφωνα με τον ακίνητο (στο έδαφος) αδρανειακό παρατηρητή (Σχήμα 6.11a), οι δυνάμεις που δρουν πάνω στη σφαίρα είναι η τάση $\boldsymbol{T}$ και το βάρος $m\boldsymbol{g}$. Ο αδρανειακός παρατηρητής συμπεραίνει ότι η επιτάχυνση τής σφαίρας είναι ίση με την επιτάχυνση τού βαγονιού και ότι η επιτάχυνση αυτή οφείλεται στην οριζόντια συνιστώσα τής $\boldsymbol{T}$. Η κατακόρυφη συνιστώσα τής $\boldsymbol{T}$ εξισορροπείται από το βάρος. Επομένως ο αδρανειακός παρατηρητής γράφει τον δεύτερο νόμο τού Newton ως $\boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{a}$, ή εάν γράψουμε τις συνιστώσες x, y



Σχήμα 6.11 (Παράδειγμα 6.8) (a) Μια σφαίρα που κρέμεται από την οροφή τού βαγονιού, το οποίο επιταχύνεται προς τα δεξιά, εκτρέπεται όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο ακίνητος αδρανειακός παρατηρητής που βρίσκεται στο έδαφος πιστεύει ότι η μπάλλα επιταχύνθηκε από τη δράση τής οριζόντιας συνιστώσας τής τάσης τού νήματος $\boldsymbol{T}$. (b) Ο μη αδρανειακός παρατηρητής όμως, που βρίσκεται μέσα στο βαγόνι, πιστεύει ότι η ολική δύναμη που δρα πάνω στη σφαίρα είναι μηδενική. Έτσι, για να εξηγήσει την εκτροπή τού νήματος από την κατακόρυφο, υποθέτει ότι πάνω στη σφαίρα δρα μια πλασματική δύναμη, η $-m\boldsymbol{a}$, η οποία εξισορροπεί την οριζόντια συνιστώσα τής τάσης $\boldsymbol{T}$.

Αδρανειακός παρατηρητής

$$\begin{cases} (1) & \sum F_x = T \sin\theta = ma \\ (2) & \sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Εάν λύσει το σύστημα τών (1) και (2) ο αδρανειακός παρατηρητής υπολογίζει την επιτάχυνση τού βαγονιού από τη σχέση

$$a = g\tan\theta$$

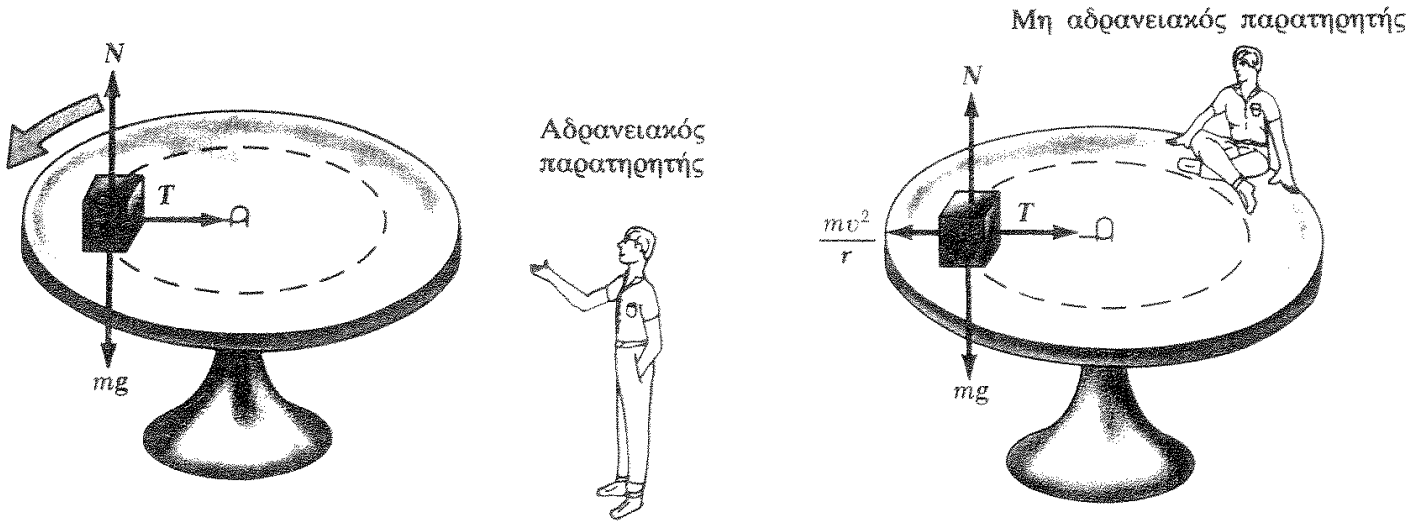
Βλέπετε, λοιπόν, ότι η απόκλιση τού νήματος από την κατακόρυφο μάς δίνει την επιτάχυνση τού βαγονιού. Αυτός είναι ο τρόπος για να χρησιμοποιήσετε *ένα απλό εκκρεμές ως επιταχυνσίμετρο*.

Σύμφωνα με έναν μη αδρανειακό παρατηρητή που βρίσκεται μέσα στο βαγόνι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.11b, η σφαίρα είναι ακίνητη και η επιτάχυνση είναι μηδενική. Επομένως, ο μη αδρανειακός παρατηρητής επινοεί μια *υποθετική δύναμη*, τη $-ma$, για να εξισορροπήσει την οριζόντια συνιστώσα τής T, απαιτώντας έτσι να είναι *μηδενική* η συνολική δύναμη που δρα πάνω στη σφαίρα! Επομένως, για το μη αδρανειακό σύστημα, ο δεύτερος νόμος τού Newton δίνει

Μη αδρανειακός παρατηρητής

$$\begin{cases} \sum F_x' = T\sin\theta - ma = 0 \\ \sum F_y' = T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες με τις (1) και (2), επομένως ο μη αδρανειακός παρατηρητής καταλήγει στο ίδιο μαθηματικό αποτέλεσμα με τον αδρανειακό παρατηρητή. Εκείνο όμως που *διαφέρει* ανάμεσα στους δύο παρατηρητές είναι η φυσική ερμηνεία τής απόκλισης τού νήματος από την κατακόρυφο. Να σημειωθεί



Σχήμα 6.12 (Παράδειγμα 6.9).

(a)

(b)

6.4 ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΕΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ

Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς την ταχύτητα

Όταν ένα σώμα κινείται με χαμηλή ταχύτητα σε ένα μέσο με ιξώδες, υπόκειται σε μια δύναμη που τό εμποδίζει. Η δύναμη αυτή είναι ανάλογη προς την ταχύτητα τού σώματος. Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη τής αντίστασης $\boldsymbol{R}$ έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{R} = -b\boldsymbol{v} \tag{6.5}$$

όπου $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητα τού σώματος και b είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες τού μέσου, από το σχήμα και από τις διαστάσεις τού σώματος. Εάν το σώμα έχει σφαιρικό σχήμα ακτίνας r, τότε το b είναι ανάλογο προς το r.

Θεωρήστε μια σφαίρα μάζας m που είναι αρχικά ακίνητη και αφήνεται ελεύθερη μέσα σε ένα υγρό, όπως στο Σχήμα 6.13a. Ας περιγράψουμε την κίνησή της, υποθέτοντας ότι οι μόνες δυνάμεις που δρουν πάνω στη σφαίρα είναι το βάρος της[1], mg, και η δύναμη αντίστασης $-b\boldsymbol{v}$.

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο τού Newton για κατακόρυφη κίνηση, επιλέγουμε τη θετική κατεύθυνση προς τα κάτω και έχουμε $\Sigma F_y = mg - bv$· επομένως

$$mg - bv = m\frac{dv}{dt}$$

όπου η επιτάχυνση κατευθύνεται προς τα κάτω. Απλοποιούμε και έχουμε

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \tag{6.6}$$

Αντίσταση τού αέρα

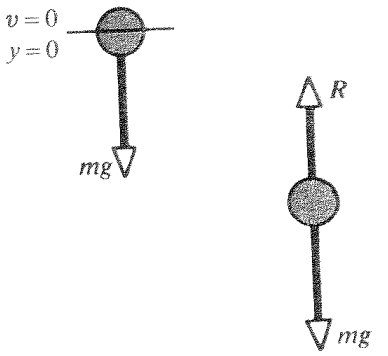
Είδαμε ότι ένα σώμα που κινείται μέσα σε ένα υγρό υπόκειται σε μια δύναμη που τού αντιστέκεται σαν να το «τραβάει» προς τα πίσω. Εάν το σώμα είναι μικρό και κινείται με μικρή ταχύτητα, το «τράβηγμα» αυτό είναι ανάλογο προς την ταχύτητα, όπως έχει ήδη αναφερθεί προηγουμένως. Αλλά όταν η ταχύτητα είναι μεγάλη και τα αντικείμενα δεν είναι μικρά, όπως λ.χ. είναι τα αεροπλάνα, οι αλεξιπτωτιστές (sky-divers) και οι μπάλλες τού μπέιζμπωλ, η δύναμη αυτή που τά «τραβάει» προς τα πίσω είναι προσεγγιστικά ανάλογη προς το *τετράγωνο* τής ταχύτητας. Στην περίπτωση αυτή ξέρουμε ότι το μέτρο τής οπισθέλκουσας αυτής δύναμης είναι

$$R = \tfrac{1}{2} C \rho A v^2 \tag{6.8}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα τού αέρα, A είναι η διατομή τού αντικειμένου μετρούμενη σε ένα επίπεδο κάθετο προς τη διεύθυνση τής κίνησης και C είναι μια ποσότητα χωρίς διαστάσεις που μετριέται εμπειρικά και λέγεται *συντελεστής αντιστάσεως*. Ο συντελεστής αντιστάσεως είναι 0.5 για σφαιρικά αντικείμενα, αλλά μπορεί να είναι ακόμη και 2 για σώματα που δεν έχουν απλό σχήμα.

Θεωρήστε ότι ένα αεροπλάνο πετά και υφίσταται την επίδραση μιας τέτοιας οπισθέλκουσας δύναμης. Η Εξίσωση 6.8 δείχνει ότι η δύναμη αυτή είναι ανάλογη προς την πυκνότητα τού αέρα, επομένως μειώνεται όταν ελαττώνεται η πυκνότητα τού αέρα. Επειδή λοιπόν η πυκνότητα τού αέρα ελαττώνεται όσο αυξάνεται το ύψος, η οπισθέλκουσα δύναμη σε ένα αεροπλάνο πρέπει να ελαττώνεται όσο μεγαλώνει το ύψος του. Επί πλέον, εάν διπλασιαστεί η ταχύτητα τού αεροπλάνου, η οπισθέλκουσα αυξάνεται 4 φορές. Για να διατηρήσει λοιπόν το αεροπλάνο την αυξημένη ταχύτητά του πρέπει να αυξήσει την προωστική του δύναμη 4 φορές, δηλαδή πρέπει να αυξηθεί η ισχύς τών κινητήρων του (δύναμη επί ταχύτητα) 8 φορές.

Οριακή ταχύτητα



Σχήμα 6.15 Ένα σώμα που πέφτει διά μέσου τού αέρα υπόκειται στην δύναμη τής βαρύτητας mg και στην αντίσταση τού αέρα R. Όταν η συνισταμένη τους είναι μηδενική, $R = mg$ και το σώμα φτάνει την οριακή του ταχύτητα. Ωσότου συμβεί αυτό, η επιτάχυνσή του μεταβάλλεται ως προς την ταχύτητα σύμφωνα με την Εξίσωση 6.10.

Ας μελετήσουμε μια μάζα που εκτελεί ελεύθερη πτώση και υπόκειται σε δύναμη που κατευθύνεται προς τα επάνω και έχει μέτρο $R = \frac{1}{2}C\rho Av^2$. Υποθέστε ότι μια μάζα m ελευθερώνεται, ενώ ήταν ακίνητη στη θέση $y = 0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.15. Η μάζα υπόκειται σε δύο εξωτερικές δυνάμεις: στο βάρος της, mg, με κατεύθυνση προς τα κάτω, και στην οπισθέλκουσα δύναμη, R, προς τα επάνω. Επομένως, το μέτρο τής συνισταμένης είναι

$$F_{\text{net}} = mg - \tfrac{1}{2}C\rho Av^2 \tag{6.9}$$

Θέτουμε $F_{\text{net}} = ma$ στην Εξίσωση 6.9 και βρίσκουμε ότι η μάζα επιταχύνεται προς τα κάτω με μέτρο επιτάχυνσης

$$a = g - \left(\frac{C\rho A}{2m}\right) v^2 \tag{6.10}$$

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την οριακή ταχύτητα v_t, λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι, όταν το βάρος εξισορροπείται από την οπισθέλκουσα δύναμη, η συνολική δύναμη είναι μηδενική και επομένως και η επιτάχυνση είναι μηδενική. Θέτουμε $a = 0$ στην Εξίσωση 6.10 και έχουμε

$$g - \left(\frac{C\rho A}{2m}\right) v_t^2 = 0 \text{ άρα} \qquad v_t = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}} \tag{6.11}$$

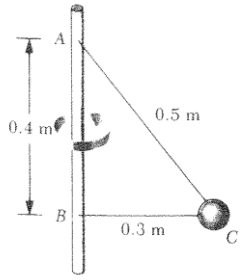
Εάν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση αυτή, μπορούμε να προσδιορίσουμε πώς η οριακή ταχύτητα εξαρτάται από τις διαστάσεις τού σώματος. Υποθέστε ότι το σώμα είναι σφαίρα ακτίνας r, επομένως $A \propto r^2$ και $m \propto r^3$ (δεδομένου ότι η μάζα είναι ανάλογη προς τον όγκο). Επομένως $v_t \propto \sqrt{r}$. Δηλαδή, καθώς αυξάνεται η r, η οριακή ταχύτητα αυξάνεται κατά την τετραγωνική ρίζα τής ακτίνας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ένα αυτοκινητάκι παιχνιδιού κάνει μια στροφή πάνω σε κυκλική τροχιά (απόσταση 200 m) μέσα σε 25 s. (a) Ποια είναι η μέση ταχύτητα; (b) Αν η μάζα τού αυτοκινήτου είναι 1.5 kg, ποιο είναι το μέτρο τής κεντρομόλου δύναμης που συγκρατεί το αυτοκίνητο στην κυκλική τροχιά;

5. Ένα σώμα μάζας 3 kg είναι δεμένο σε ένα ελαφρό νήμα και περιστρέφεται κάνοντας κυκλική κίνηση πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβές. Η ακτίνα τού κύκλου είναι 0.8 m και το νήμα μπορεί να αντέξει μια μάζα 25 kg προτού σπάσει. Ποια περιοχή ταχυτήτων μπορεί να έχει το σώμα προτού σπάσει το νήμα;

37. Μια χάντρα μάζας 100 g είναι ελεύθερη να γλιστρά κατά μήκος ενός κομματιού νήματος ABC που έχει μήκος 0.8 m. Τα άκρα τού νήματος είναι δεμένα σε μια κατακόρυφη ράβδο στα σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 0.4 m, όπως στο Σχήμα 6.19. Όταν η ράβδος περιστρέφεται, το BC είναι οριζόντιο και ίσο με 0.3 m. (a) Ποια είναι η τάση τού νήματος; (b) Ποια είναι η ταχύτητα τής χάντρας στο σημείο C;

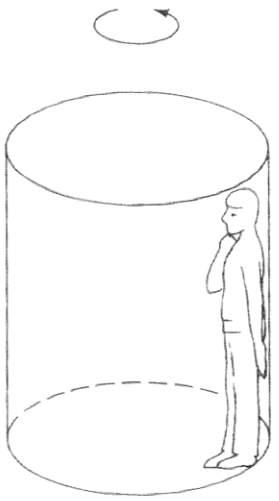


Σχήμα 6.19 (Πρόβλημα 37).

39. Λόγω τής περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της, ένα σημείο τού ισημερινού υφίσταται κεντρομόλο επιτάχυνση ίση με 0.034 m/s^2, ενώ ένα σημείο στους πόλους δεν υφίσταται κεντρομόλο επιτάχυνση. (a) Αποδείξτε ότι στον ισημερινό η βαρυτική δύναμη ενός σώματος (το πραγματικό βάρος) πρέπει να είναι *μεγαλύτερη* από το φαινόμενο βάρος του. (b) Ποιο είναι το φαινόμενο βάρος, στον ισημερινό και στους πόλους, ενός ανθρώπου που έχει μάζα 75 kg; (Υποθέστε ότι η Γη είναι ομογενής σφαίρα και πάρετε g = 9.800 m/s^2).

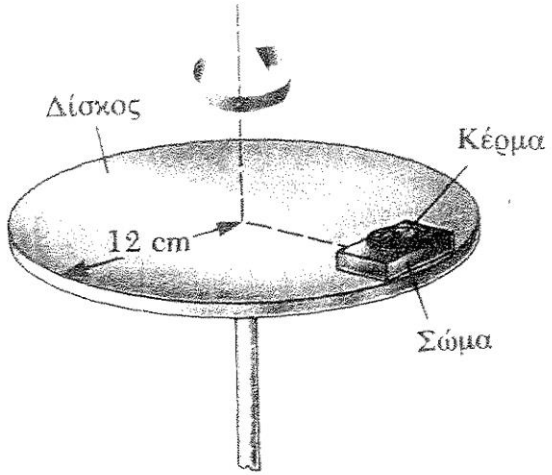
42. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε μιά καμπή που έχει κλίση όπως στο Σχήμα 6.5. Η ακτίνα καμπυλότητας τής καμπής τού δρόμου είναι R, η γωνία κλίσης θ και ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ. (a) Καθορίστε την *περιοχή* ταχυτήτων που μπορεί να έχει το αυτοκίνητο χωρίς να ολισθήσει προς τα έξω ή προς τα μέσα τού δρόμου. (b) Βρείτε την ελάχιστη τιμή τού μ έτσι ώστε η ελάχιστη ταχύτητα να είναι μηδέν. (c) Ποια είναι η δυνατή περιοχή ταχυτήτων αν R = 100 m, $\theta = 10°$ και $\mu = 0.1$ (με ολισθηρές συνθήκες);

49. Για έναν «περίπατο» στο λούνα παρκ χρησιμοποιείται ένας μεγάλος κατακόρυφος κύλινδρος που στριφογυρίζει γύρω από τον άξονά του αρκετά γρήγορα έτσι ώστε κάθε άτομο στο εσωτερικό του να κρατιέται στο τοίχωμα, μολονότι το πάτωμα αποσύρεται (βλ. Σχήμα 6.23). Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ τού ανθρώπου και τού τοιχώματος είναι μ_s και η ακτίνα τού κυλίνδρου είναι R. (a) Δείξτε ότι η *μέγιστη* περίοδος περιστροφής που χρειάζεται για να συγκρατεί τον άνθρωπο ώστε να μην πέσει είναι $T = (4\pi^2 R\mu_s/g)^{1/2}$. (b) Υπολογίστε μια αριθμητική τιμή για το T αν $R = 4$ m και $\mu_s = 0.4$. Πόσες περιστροφές το λεπτό κάνει ο κύλινδρος;



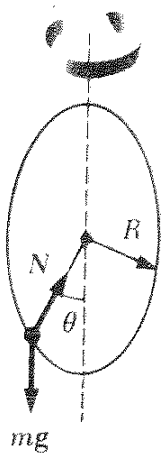
Σχήμα 6.23 (Πρόβλημα 49).

50. Ένα κέρμα μάζας 3.1 g τοποθετείται πάνω σε ένα μικρό σώμα μάζας 20 g που συγκρατείται από έναν περιστρεφόμενο δίσκο (βλ. Σχήμα 6.24). Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και δίσκου είναι 0.75 (στατικής) και 0.64 (ολισθήσεως) ενώ για το κέρμα και το σώμα είναι 0.45 (ολισθήσεως) και 0.52 (στατικής), ποια είναι η μέγιστη περιστροφή τού δίσκου σε τόσες στροφές το λεπτό, ώστε να μην γλιστρήσει πάνω στο δίσκο ούτε το σώμα ούτε το κέρμα;



Σχήμα 6.24 (Πρόβλημα 50).

51. Μια χάντρα έχει περαστεί σε μια κατακόρυφη συρμάτινη στεφάνη χωρίς τριβές ακτίνας R. Η στεφάνη περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.25. Η περίοδος περιστροφής τής στεφάνης είναι T. Η χάντρα έχει μάζα m και ηρεμεί ως προς τη στεφάνη σε μια γωνία θ. Απαντήστε στα ακόλουθα, σε συνάρτηση με τις δεδομένες παραμέτρους και την επιτάχυνση τής βαρύτητας g. (a) Βρείτε την κάθετη δύναμη N που ασκείται στη χάντρα από το σύρμα. (b) Προσδιορίστε τη γωνία μεταξύ τής κάθετης δύναμης και τού άξονα περιστροφής. (c) Υπολογίστε την κεντρομόλο δύναμη που δρα στη χάντρα.



Σχήμα 6.25 (Πρόβλημα 51).

55. Ένα σώμα μάζας 0.5 kg ολισθαίνει προς τα κάτω κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας 30° και μήκους 1 m. Ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως μεταξύ τού σώματος και τού κεκλιμένου επιπέδου μεταβάλλεται με την ταχύτητα τού σώματος σύμφωνα με τη σχέση

$$\mu = 0.3 + 1.2\sqrt{v}$$

όπου η v είναι σε m/s. (a) Χρησιμοποιήστε μια μέθοδο τού απειροστικού λογισμού για να βρείτε την ταχύτητα τού σώματος σε διαστήματα τών 10 cm κατά τη διάρκεια τής κίνησής του. (b) Αν το μήκος τού κεκλιμένου επιπέδου επεκταθεί κατά μερικά km, θα φτάσει το σώμα σε οριακή ταχύτητα; Αν είναι έτσι, ποιά είναι η οριακή του ταχύτητα και σε ποιο σημείο τού κεκλιμένου επιπέδου αποκτάται;

Η παρουσίαση αυτή είναι στηριγμένη στο βιβλίο
Φυσική Ι Μηχανική, Physics for Scientists and Engineers, R. A. Serway (Απόδοση στα ελληνικά Λεωνίδα Ρεσβάνη), 1990, Εκδόσεις Κορφιάτης