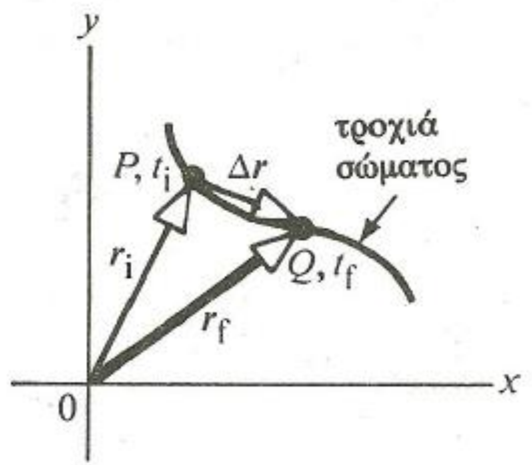
4 – Κίνηση σε δύο διαστάσεις

4.1 ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ, ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος ορίζεται πλήρως εάν γνωρίζουμε τη συναρτησιακή σχέση τής συντεταγμένης ως προς τον χρόνο. Ας προεκτείνουμε την προηγούμενη ιδέα στην κίνηση ενός σώματος επί τού επιπέδου *xy*. Αρχίζουμε με την περιγραφή τής θέσης τού σώματος που μελετούμε με το *διάνυσμα θέσης* (ή *επιβατική ακτίνα*) **r**. Αρχή τού διανύσματος θέσης είναι η αρχή τού συστήματος συντεταγμένων και κατάληξή του είναι το ίδιο το σώμα τού οποίου τη θέση περιγράφει το διάνυσμα θέσης πάνω στο επίπεδο *xy*, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1 Την



Σχήμα 4.1 Ένα σώμα που κινείται στο επίπεδο *xy* περιγράφεται από το διάνυσμα τής επιβατικής του ακτίνας ***r*** που αρχίζει από την αρχή τών συντεταγμένων και καταλήγει στο σώμα. Το διάνυσμα τής μετατόπισης τού σώματος, καθώς αυτό κινείται από το σημείο *P* στο σημείο *Q* κατά τη διάρκεια τού χρονικού διαστήματος $\Delta t = t_f - t_i$, είναι το $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$.

στιγμή t_i το σώμα βρίσκεται στο σημείο P και, αργότερα, σε άλλη στιγμή t_f, το σώμα βρίσκεται στο σημείο Q. Καθώς το σώμα κινείται από το P στο Q κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$, το διάνυσμα θέσης μεταβάλλεται από $\boldsymbol{r}_i$ σε $\boldsymbol{r}_f$, όπου οι δείκτες i και f αναφέρονται στις αρχικές και στις τελικές τιμές, αντίστοιχα. Επειδή $\boldsymbol{r}_f = \boldsymbol{r}_i + \Delta \boldsymbol{r}$, το *διάνυσμα μετατόπισης* για το σώμα είναι

$$\Delta \boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_f - \boldsymbol{r}_i \tag{4.1}$$

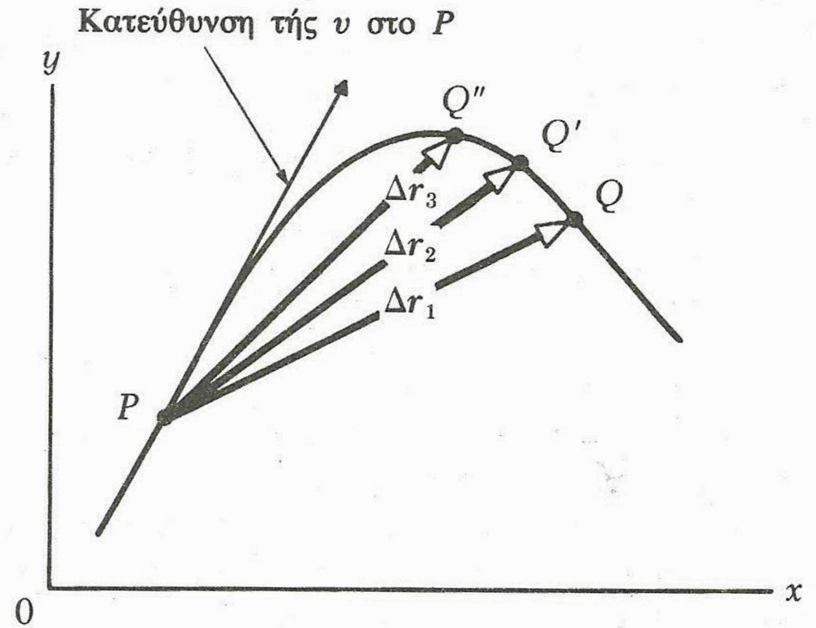
Η κατεύθυνση $\Delta \boldsymbol{r}$ φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Να σημειωθεί ότι το διάνυσμα τής μετατόπισης ισούται με τη διαφορά τού τελικού διανύσματος θέσης μείον το αρχικό διάνυσμα θέσης. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 4.1, το μέτρο τού διανύσματος μετατόπισης είναι *μικρότερο* από την απόσταση που διήνυσε το σώμα πάνω στην καμπυλόγραμμη τροχιά.

Ορίζουμε ότι η *μέση ταχύτητα* τού σώματος κατά το χρονικό διάστημα Δt ισούται με τον λόγο τής μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο έγινε η μετατόπιση:

$$\bar{\boldsymbol{v}} \equiv \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

Θεωρήστε και πάλι την κίνηση ενός σώματος ανάμεσα σε δύο σημεία πάνω στο επίπεδο *xy*, όπως στο Σχήμα 4.2. Καθώς τα χρονικά διαστήματα ολοένα μικραίνουν, οι αντίστοιχες μετατοπίσεις $\Delta \boldsymbol{r}_1$, $\Delta \boldsymbol{r}_2$, $\Delta \boldsymbol{r}_3$... μειώνονται αντίστοιχα, ενώ η κατεύθυνση τής μετατόπισης τείνει να συμπέσει με την εφαπτομένη τής τροχιάς στο σημείο *P*.

Ορίζουμε ότι η *στιγμιαία ταχύτητα*, *v*, είναι το όριο τής μέσης ταχύτητας, $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$, καθώς το Δt τείνει προς το μηδέν:

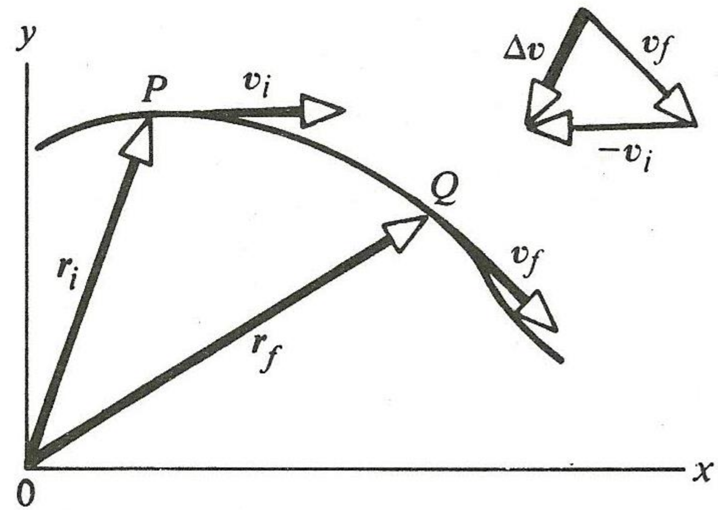


Σχήμα 4.2 Καθώς ένα σώμα κινείται ανάμεσα σε δύο σημεία *P* και *Q*, η μέση ταχύτητά του έχει την κατεύθυνση τού διανύσματος $\Delta \boldsymbol{r}$. Καθώς το σημείο *Q* κινείται πλησιέστερα προς το *P*, η κατεύθυνση τού $\Delta \boldsymbol{r}$ τείνει να συμπέσει με την κατεύθυνση τής εφαπτομένης στο σημείο *P*. Ορίζουμε ότι η κατεύθυνση τής στιγμιαίας ταχύτητας που έχει το σώμα στο σημείο *P* συμπίπτει με την κατεύθυνση τής εφαπτομένης στην τροχιά στο ίδιο σημείο.

$$\boldsymbol{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad (4.3)$$

Ορίζουμε ότι η *μέση επιτάχυνση* τού σώματος, καθώς αυτό κινείται από το P στο Q, ισούται με τον λόγο τής μεταβολής τού διανύσματος τής στιγμιαίας ταχύτητας, Δv, προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt:

$$\bar{a} \equiv \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{4.4}$$



Σχήμα 4.3 Το διάνυσμα τής μέσης επιτάχυνσης, $\bar{a}$, για ένα σώμα που κινείται από το P στο Q έχει την κατεύθυνση τού διανύσματος που είναι ίσο με τη μεταβολή τής ταχύτητας $\Delta v = v_f - v_i$.

Ορίζουμε ότι η *στιγμιαία επιτάχυνση*, a, είναι ίση με το όριο $\Delta v/\Delta t$ καθώς το Δt τείνει στο μηδέν:

$$a \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{4.5}$$

4.2 ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ένα κινούμενο σώμα περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$ το οποίο μπορούμε να γράψουμε

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \tag{4.6}$$

όπου τα x, y και $\boldsymbol{r}$ μεταβάλλονται συναρτήσει τού χρόνου καθώς το σώμα κινείται. Εάν το διάνυσμα θέσης είναι γνωστό, η ταχύτητα τού σώματος βρίσκεται από τις Εξισώσεις 4.3 και 4.6, που δίνουν

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} \tag{4.7}$$

Οι συνιστώσες τής επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}$, a_x και a_y, είναι σταθερές επειδή η $\boldsymbol{a}$ είναι σταθερή. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις κίνησης στις συνιστώσες x και y τής ταχύτητας. Εάν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $v_x = v_{x0} + a_xt$ και $v_y = v_{y0} + a_yt$ στην Εξίσωση 4.7 έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= (v_{x0} + a_xt)\boldsymbol{i} + (v_{y0} + a_yt)\boldsymbol{j} \\ &= (v_{x0}\boldsymbol{i} + v_{y0}\boldsymbol{j}) + (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j})t\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t \tag{4.8}$$

Επίσης, γνωρίζουμε από την Κινητική ότι οι συνιστώσες x και y ενός σώματος που κινείται με σταθερή επιτάχυνση δίνονται από τις σχέσεις

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{and} \qquad y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Εάν αντικαταστήσουμε με τις παραπάνω σχέσεις στην Εξίσωση 4.6, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\mathbf{i} + (y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\mathbf{j} \\ &= (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}) + (v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j})t + \tfrac{1}{2}(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t^2 \end{aligned}$$

ή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \tag{4.9}$$

εφόσον οι Εξισώσεις 4.8 και 4.9 είναι *διανυσματικές* σχέσεις που έχουν μία ή περισσότερες συνιστώσες (γενικά έχουν τρεις συνιστώσες), μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις αυτές γράφοντας τις συνιστώσες τους στον άξονα τών x και y με $\mathbf{r}_0 = 0$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \qquad \begin{cases} v_x = v_{x0} + a_x t \\ v_y = v_{y0} + a_y t \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad \begin{cases} x = v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \\ y = v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$

4.3 ΚΙΝΗΣΗ ΒΛΗΜΑΤΩΝ

Επιλέγουμε το σύστημα αναφοράς (δηλαδή το ορισμένο σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε έτσι ώστε η θετική κατεύθυνση y να είναι κατακόρυφη προς τα επάνω· τότε $\boldsymbol{a}_y = -\boldsymbol{g}$ (όπως στη μονοδιάστατη ελεύθερη πτώση) και $\boldsymbol{a}_x = 0$ (δεν λαμβάνεται υπ όψιν η τριβή με τον αέρα). Υποθέτουμε ότι το βλήμα εκτοξεύεται από την αρχή τών συντεταγμένων ($x_0 = y_0 = 0$) την χρονική στιγμή $t = 0$ με αρχική ταχύτητα v_0, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Εάν το διάνυσμα $\boldsymbol{v}_0$ σχηματίζει γωνία θ_0 με τον άξονα τών x (που είναι οριζόντιος), όπως στο Σχήμα 4.5, τότε από την τριγωνομετρία ξέρουμε ότι

$$\cos\theta_0 = v_{x0}/v_0 \qquad \text{και} \qquad \sin\theta_0 = v_{y0}/v_0$$

Επομένως οι συνιστώσες x και y τής αρχικής ταχύτητας είναι

$$v_{x0} = v_0\cos\theta_0 \qquad \text{και} \qquad v_{y0} = v_0\sin\theta_0$$

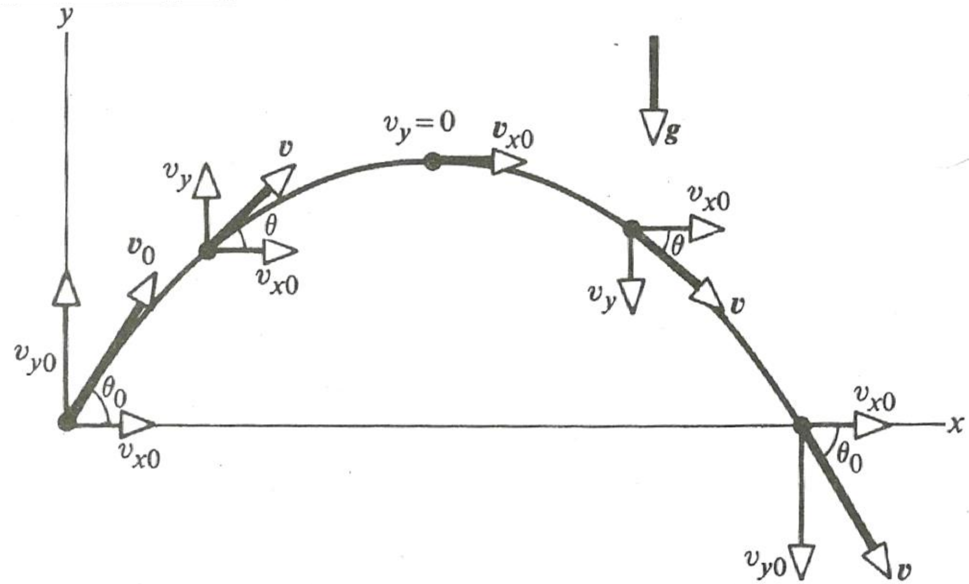
Εάν θέσουμε αυτές τις σχέσεις στις Εξισώσεις 4.8 και 4.9 με $a_x = 0$ και $a_y = -g$, βρίσκουμε τις συνιστώσες τής ταχύτητας και τις συντεταγμένες τού βλήματος για κάθε χρόνο t:

$$v_x = v_{x0} = v_0\cos\theta_0 = \text{ σταθερή} \tag{4.10}$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0\sin\theta_0 - gt \tag{4.11}$$

$$x = v_{x0}t = (v_0\cos\theta_0)t \tag{4.12}$$

$$y = v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_0\sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{4.13}$$



Σχήμα 4.5 Η παραβολική τροχιά ενός βλήματος που εκτοξεύεται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$. Προσέξτε πώς μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου το διάνυσμα τής ταχύτητας $\boldsymbol{v}$. Πάντως, η x συνιστώσα τής ταχύτητας, $\boldsymbol{v}_{x0}$, παραμένει σταθερή. Σημειώστε ότι στο υψηλότερο σημείο τής τροχιάς, $\boldsymbol{v}_y = 0$.

Εάν στην Εξίσωση 4.12 λύσουμε ως προς t και αντικαταστήσουμε, με τη σχέση τού t που θα προκύψει, στην Εξίσωση 4.13 βρίσκουμε:

$$y = (\tan\theta_0)x - \left(\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta_0}\right)x^2 \qquad (4.14)$$

που ισχύει για τις γωνίες θ_0, $0 < \theta_0 < \pi/2$. Η τελευταία εξίσωση έχει τη μορφή $y = ax - bx^2$, αυτή όμως είναι η εξίσωση μιας παραβολής που διέρχεται από την αρχή τών συντεταγμένων. Αποδείξαμε, δηλαδή, ότι η τροχιά ενός βλήματος είναι παραβολή. Ας σημειωθεί ότι η τροχιά ορίζεται *πλήρως* εάν γνωρίζουμε τα $\boldsymbol{v}_0$ και θ_0.

Μπορούμε να βρούμε το μέτρο τής ταχύτητας τού βλήματος ως συνάρτηση τού χρόνου εάν προσέξουμε ότι οι Εξισώσεις 4.10 και 4.11 δίνουν τις x και y συνιστώσες της ταχύτητας για κάθε στιγμή. Επομένως ξέρουμε ότι

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} \tag{4.15}$$

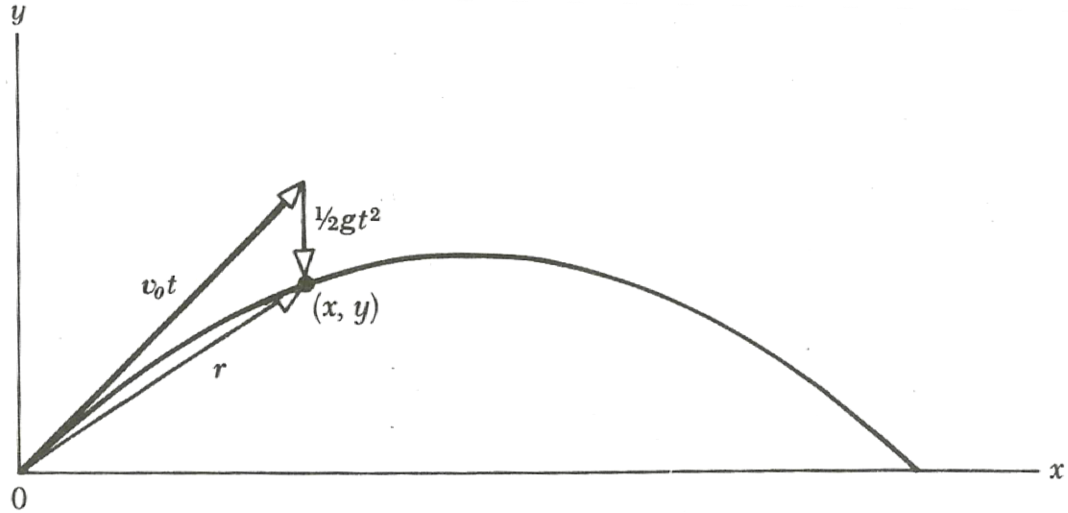
Ξέρουμε επίσης ότι το διάνυσμα τής ταχύτητας έχει τη διεύθυνση τής εφαπτομένης τής τροχιάς για κάθε στιγμή. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5, η γωνία που σχηματίζει η $\boldsymbol{v}$ με την οριζόντια διεύθυνση σε κάθε στιγμή βρίσκεται από τις συνιστώσες v_x και v_y:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \tag{4.16}$$

Η διανυσματική σχέση για το διάνυσμα θέσης τού βλήματος ως συνάρτηση τού χρόνου προκύπτει άμεσα από την Εξίσωση 4.9 εάν αντικαταστήσουμε $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

Αυτή η έκφραση είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις 4.12 και 4.13 και η γραφική παράστασή της δίνεται στο Σχήμα 4.6. Ας σημειωθεί ότι η εξίσωση αυτή είναι



Σχήμα 4.6 Το διάνυσμα μετατόπισης, $\boldsymbol{r}$, ενός βλήματος με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$. Εάν δεν υπήρχε η βαρυτική έλξη, το διάνυσμα τής μετατόπισης θα ήταν ίσο προς το $\boldsymbol{v}_0 t$, το δε διάνυσμα $\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$ είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση που προκαλεί η βαρύτητα στον χρόνο t.

συνεπής προς την Εξίσωση 4.13, αφού το $\boldsymbol{r}$ είναι διάνυσμα και $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j}$ όταν η θετική κατεύθυνση είναι προς τα πάνω. Αξίζει να σημειωθεί πως μπορείτε να θεωρήσετε ότι η κίνηση είναι το αποτέλεσμα τής υπέρθεσης (συνδυασμού) δύο όρων: τού $\boldsymbol{v}_0 t$, που είναι ίσος με τη μετατόπιση εάν δεν υπήρχε επιτάχυνση, και τού όρου $\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$, που οφείλεται στην βαρυτική επιτάχυνση. Με άλλα λόγια, εάν δεν υπήρχε βαρυτική επιτάχυνση, το σώμα θα εξακολουθούσε να κινείται στη διεύθυνση τού $\boldsymbol{v}_0$. Επομένως, η κατακόρυφη απόσταση, $\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$, την οποία διανύει το σώμα «πέφτοντας», είναι ίση με εκείνην που θα διήνυε ένα σώμα που υπόκειται σε ελεύθερη πτώση. *Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η κίνηση βλημάτων είναι αποτέλεσμα τής υπέρθεσης δύο κινήσεων:* (1) *τής κίνησης ενός σώματος, σε κατακόρυφη διεύθυνση, που πέφτει ελεύθερα με σταθερή επιτάχυνση·* και (2) *τής ισοταχούς κίνησης σε οριζόντια διεύθυνση.*

Βεληνεκές και μέγιστο ύψος τροχιάς βλήματος Ας υποθέσουμε ότι ένα βλήμα εκτοξεύεται από την αρχή τών συντεταγμένων κατά τη στιγμή $t = 0$ με θετική συνιστώσα v_y όπως στο Σχήμα 4.7. Θα αναλύσουμε δύο περιπτώσεις οι οποίες έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον: το μέγιστο ύψος τής τροχιάς, που σε καρτεσιανές συντεταγμένες αντιστοιχεί στο σημείο $(R/2, h)$, και στο βεληνεκές, που αντιστοιχεί στο $(R, 0)$. Η απόσταση R ονομάζεται *βεληνεκές* τού βλήματος, και το h *μέγιστο ύψος* τής τροχιάς. Ας βρούμε τα h και R συναρτήσει τών v_0, θ_0 και g.

Για να βρούμε το μέγιστο ύψος αρκεί να θυμηθούμε ότι, στην κορυφή τής τροχιάς, $v_y = 0$. Επομένως, η Εξίσωση 4.11 είναι εκείνη η οποία προσδιορίζει τον χρόνο t_1 που κάνει το βλήμα ώσπου να φτάσει στην κορυφή:

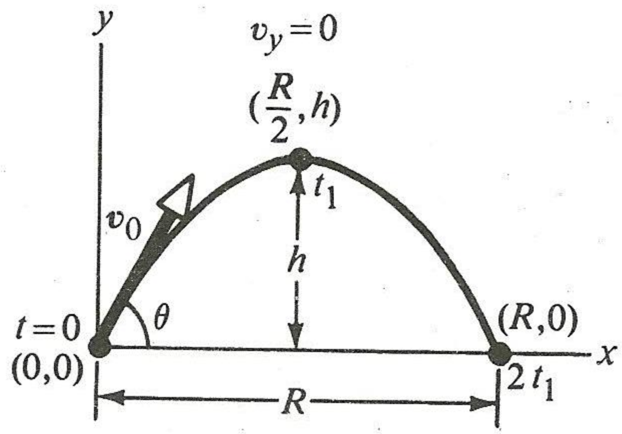
$$t_1 = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

Εάν θέσουμε αυτήν την έκφραση τού t_1 στην Εξίσωση 4.13 βρίσκουμε το h συναρτήσει τού v_0 και τού θ_0:

$$h = (v_0 \sin \theta_0) \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{{v_0}^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \qquad (4.17)$$

Το βεληνεκές R είναι ίσο με την οριζόντια απόσταση που διήνυσε το βλήμα στο διπλάσιο τού χρόνου t_1, δηλαδή $2t_1$. (Αυτό μπορείτε να τό δείτε εάν θέσετε $y = 0$ στην Εξίσωση 4.13 και λύσετε ως προς t τη δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει. Η μία από τις λύσεις τής δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι η $t = 0$



Σχήμα 4.7 Ένα βλήμα εκτοξεύεται τη στιγμή $t = 0$ με αρχική ταχύτητα v_0. Το βεληνεκές είναι R και το μέγιστο ύψος είναι h.

και η άλλη $t = 2t_1$). Εάν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 4.12 και θέσουμε $x = R$ για $t = 2t_1$ βρίσκουμε

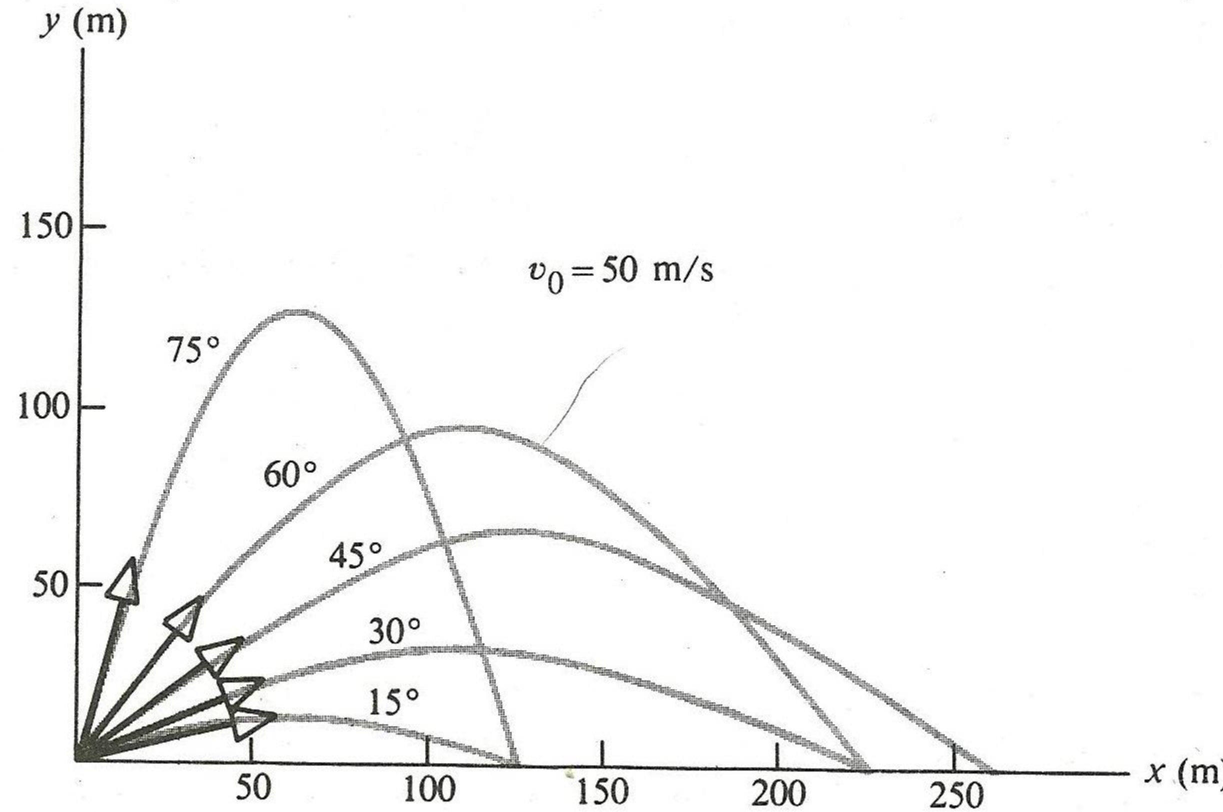
$$R = (v_0 \cos \theta_0) 2t_1 = (v_0 \cos \theta_0) \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$$

$$R = \frac{2{v_0}^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

Αλλά $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, οπότε μπορούμε να γράψουμε το R πιο κομψά:

$$R = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta_0}{g} \tag{4.18}$$

Στο Σχήμα 4.8 φαίνονται διάφορες τροχιές για βλήμα με δεδομένο μέτρο αρχικής ταχύτητας. Όπως βλέπετε, το βεληνεκές μεγιστοποιείται για $\theta_0 = 45°$. Προσέξτε επίσης ότι για κάθε θ διάφορο από 45°, σε κάθε βεληνεκές με συντεταγμένες $(R, 0)$ αντιστοιχούν *δύο* συμπληρωματικές τιμές τού θ_0, λ.χ. 75° και 15°. Προφανώς, όμως, το μέγιστο ύψος και ο αντίστοιχος χρόνος πτήσης διαφέρει για καθεμιά από τις δύο τιμές τού θ_0.



Σχήμα 4.8 Βλήμα που εκτοξεύεται με την ίδια αρχική ταχύτητα $v_0 = 50$ m/s, αλλά με διαφορετική κάθε φορά κλίση, ως προς την οριζόντιο. Σημειώστε ότι οι συμπληρωματικές τιμές τού θ_0 δίνουν το ίδιο βεληνεκές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2 **Άλμα σε μήκος**

Ένας άλτης πηδά σχηματίζοντας γωνία 20° με την οριζόντιο και με ταχύτητα 11 m/s. (a) Πόσο μακριά πηδάει; (Υποθέστε ότι η κίνηση τού άλτη είναι παρόμοια με την κίνηση ενός σωματιδίου).

Λύση Η κίνησή του, που είναι παράλληλη προς την οριζόντιο, περιγράφεται από την Εξίσωση 4.12:

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t = (11 \text{ m/s})(\cos 20°)t$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το x εάν γνωρίζουμε τον χρόνο τού άλματος t, τον οποίο βρίσκουμε χρησιμοποιώντας την σχέση $v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$. Ξέρουμε ότι στο μεγαλύτερο ύψος τού άλματος η $v_y = 0$.

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

$$0 = (11 \text{ m/s}) \sin 20° - (9.80 \text{ m/s}^2)t_1$$

$$t_1 = 0.384 \text{ s}$$

Ας σημειωθεί ότι t_1 είναι ο χρόνος που περνά μέχρις ότου ο άλτης φτάσει στο *υψηλότερο σημείο άλματος*. Λόγω όμως τής συμμετρίας τής κατακόρυφης κίνησης, ο άλτης χρειάζεται επίσης χρόνο t_1 για την κάθοδό του από το υψηλότερο σημείο τού άλματος στο έδαφος. Επομένως, ο *συνολικός χρόνος* που ο άλτης βρισκόταν στον αέρα είναι $t = 2t_1 = 0.768$ s. Εάν αντικαταστήσουμε με τον χρόνο στην έκφραση για το x έχουμε:

$$x = (11 \text{ m/s})(\cos 20°)(0.768 \text{ s}) = 7.94 \text{ m}$$

(b) Ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο έφτασε ο άλτης;

Λύση Για να βρούμε το υψηλότερο σημείο τού άλματος, χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 4.13, όπου θέτουμε $t = t_1 = 0.384$ s:

$$y_{max} = (v_0 \sin \theta_0)t_1 - \tfrac{1}{2}g{t_1}^2$$

$$y_{max} = (11 \text{ m/s})(\sin 20°)(0.384 \text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(0.384 \text{ s})^2$$

$$= 0.722 \text{ m}$$

Προφανώς, η υπόθεση που κάναμε ότι η κίνηση τού άλτη είναι παρόμοια με την κίνηση ενός σωματιδίου είναι υπεραπλουστευμένη. Πάντως, οι απαντήσεις τις οποίες δώσαμε με τους υπολογισμούς που κάναμε είναι λογικές. Θα μπορούσαμε επίσης να έχουμε βρει τις ίδιες απαντήσεις εάν χρησιμοποιούσαμε τις Εξισώσεις 4.17 και 4.18.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3 Στο στόχαστρο

Μία διαδεδομένη επίδειξη στο μάθημα τής Γενικής Φυσικής είναι η παρακάτω: Ένα «κανονάκι» σκοπεύει έναν ακίνητο στόχο. Τη στιγμή που πυροδοτείται το κανονάκι, ο στόχος πέφτει (με μηδενική αρχική ταχύτητα) όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.9. Θα αποδείξουμε ότι εάν η σκόπευση ήταν σωστή, το βλήμα θα χτυπούσε τον στόχο.

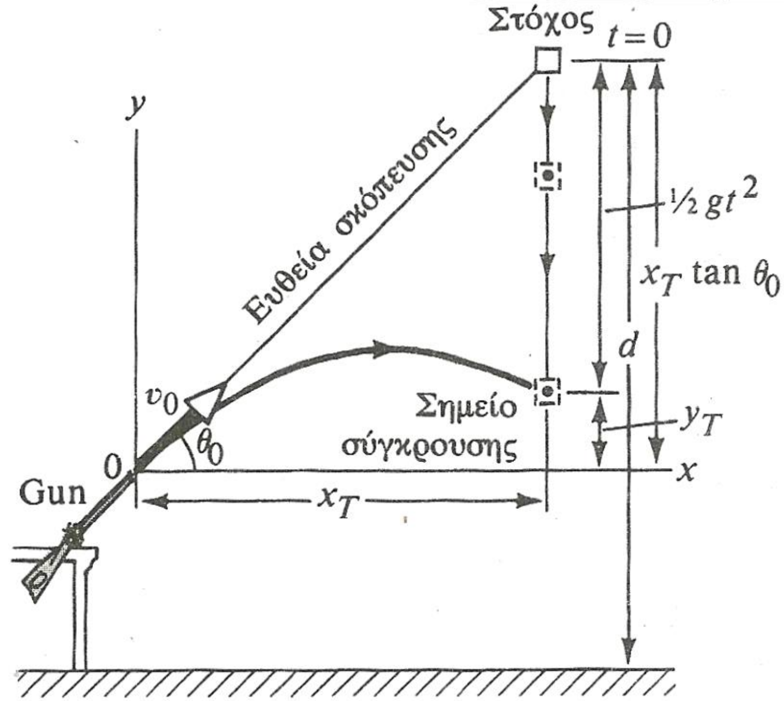
Λύση Το βλήμα και ο στόχος υπόκεινται στην *ίδια* επιτάχυνση, $a_y = -g$. Από το Σχήμα 4.9 είναι σαφές ότι η αρχική συντεταγμένη y τού στόχου είναι $x_T \tan\theta_0$ και στη διάρκεια τού χρόνου t ο στόχος διανύει πέφτοντας απόσταση $\frac{1}{2}gt^2$. Επομένως η συντεταγμένη y τού στόχου συναρτήσει τού χρόνου είναι

$$y_T = x_T \tan\theta_0 - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Ας γράψουμε τώρα τις εξισώσεις που δίνουν τις συντεταγμένες x και y τού βλήματος για κάθε χρόνο t. Χρησιμοποιούμε τις Εξισώσεις 4.12 και 4.13, και έχουμε

$$y_P = x_P \tan\theta_0 - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Έτσι βλέπουμε, ότι όταν $x_P = x_T$, έχουμε $y_T = y_P$ και το βλήμα χτυπάει τον στόχο.



Σχήμα 4.9 (Παράδειγμα 4.3) Το όπλο σκοπεύει τον στόχο. Εάν πυροδοτηθεί την ίδια στιγμή που αρχίζει να πέφτει ο στόχος, τότε το βλήμα θα τόν χτυπήσει. Και τούτο διότι το βλήμα και ο στόχος υπόκεινται στην ίδια επιτάχυνση τής βαρύτητας, $a_y = -g$, κατά το ίδιο χρονικό διάστημα t. Έτσι, πέφτουν κατά την ίδια κατακόρυφη απόσταση y.

Πάντως, πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν ότι δεν αρκούν τα παραπάνω ώστε το βλήμα να χτυπήσει τον στόχο. Πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα και η ανισότητα $v_0 \sin\theta_0 \geqq \sqrt{gd/2}$, όπου d είναι το αρχικό ύψος τού στόχου πάνω από το *έδαφος*, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.9. Εάν το $v_0 \sin\theta_0$ είναι μικρότερο από αυτήν την τιμή, το βλήμα δεν έχει το απαραίτητο βεληνεκές και θα πέσει στο έδαφος προτού χτυπήσει τον στόχο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6 Χιονοδρομικό άλμα

Ένας χιονοδρόμος-άλτης κατεβαίνει με σκι την πλαγιά και όταν φθάσει στο καθορισμένο σημείο τής πίστας «απογειώνεται» σε οριζόντια διεύθυνση με ταχύτητα 25 m/s, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.12. Το έδαφος από κάτω έχει κλίση 35° με την οριζόντιο. (a) Σε ποιο σημείο τής πλαγιάς προσγειώνεται ο χιονοδρόμος;

Λύση Για ευκολία, επιλέγουμε την αρχή τών συντεταγμένων ($x = y = 0$) στο σημείο έναρξης τού άλματος. Ξέρουμε ότι $v_{x0} = 25$ m/s και $v_{y0} = 0$. Εάν χρησιμοποιήσουμε τις Εξισώσεις 4.12 και 4.13 έχουμε

$$(1) \qquad x = v_{x0}t = (25 \text{ m/s})t$$

$$(2) \qquad y = v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = -\tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Ονομάζουμε d την παράλληλη προς την πλαγιά απόσταση ανάμεσα στα σημεία «απογείωσης» και «προσγείωσης». Από το ορθογώνιο τρίγωνο τού Σχήματος 4.12 βλέπουμε ότι οι συνιστώσες x και y τού σημείου προσγείωσης είναι $x = d\cos 35°$ και $y = -\,d\sin 35°$. Εάν αντικαταστήσουμε με τις τιμές αυτές στις (1) και (2) βρίσκουμε

$$(3) \qquad d\cos 35° = (25 \text{ m/s})t$$

$$(4) \qquad -d\sin 35° = -\tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

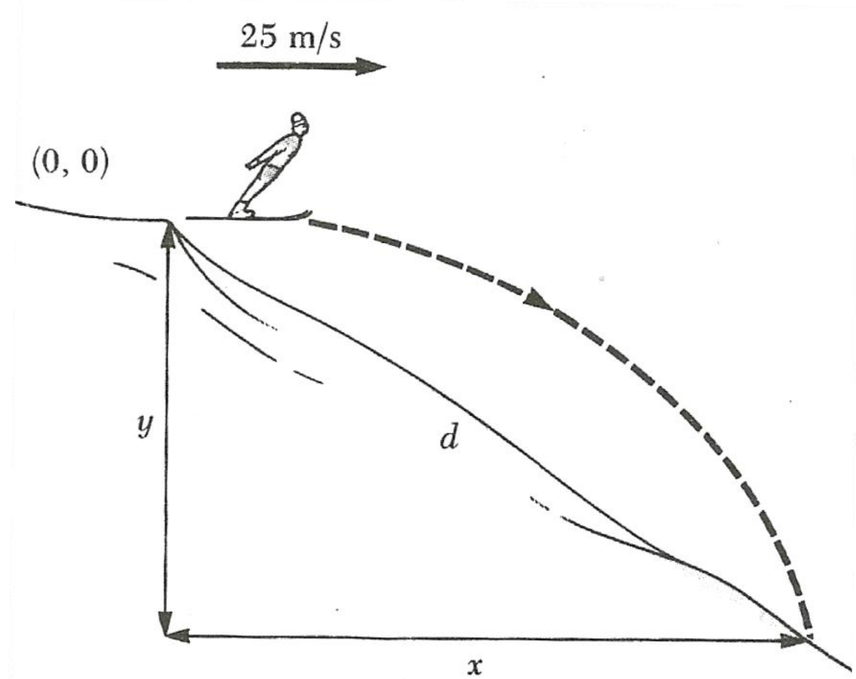
Με απαλοιφή τού χρόνου από τις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε $d = 109$ m. Επομένως, οι συνιστώσες x και y τού σημείου προσγείωσης είναι

$$x = d\cos 35° = (109 \text{ m})\cos 35° = \boxed{89.3 \text{ m}}$$

$$y = -d\sin 35° = -(109 \text{ m})\sin 35° = \boxed{-62.5 \text{ m}}$$

Άσκηση 3 Βρείτε τον χρόνο που ο χιονοδρόμος-άλτης βρίσκεται στον αέρα, καθώς επίσης και την κατακόρυφη συνιστώσα τής ταχύτητάς του λίγο προτού προσγειωθεί.

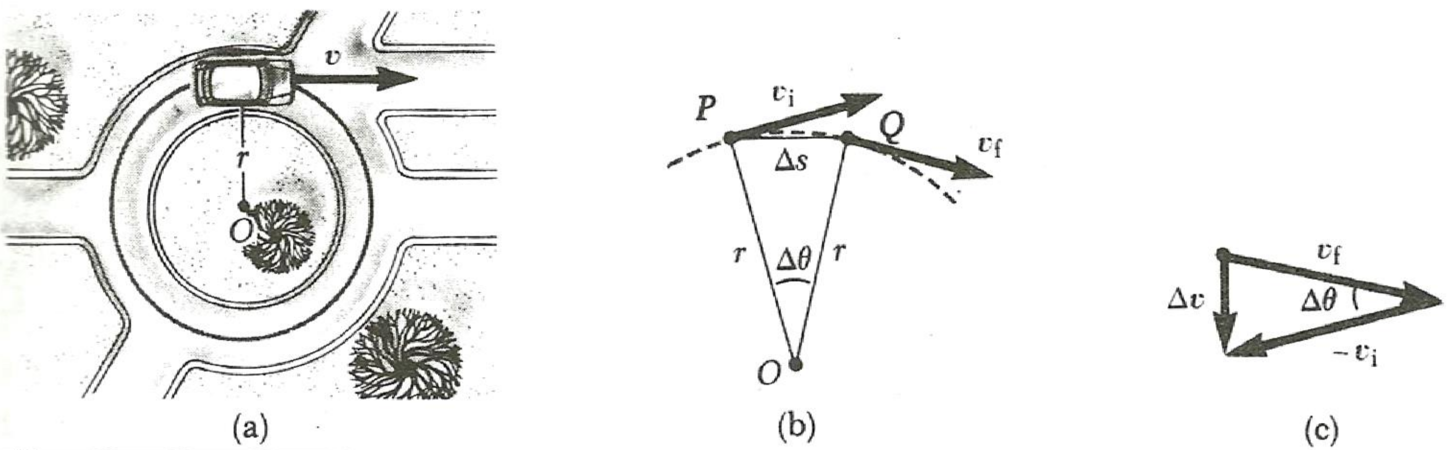
Απάντηση 3.57 s· $v_y = -\ 35.0$ m/s



4.4 ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Το Σχήμα 4.13a δείχνει ένα σώμα που κινείται με *σταθερό μέτρο ταχύτητας* $|\boldsymbol{v}|$. Πολλοί σπουδαστές εκπλήσσονται όταν διαπιστώνουν ότι το σώμα, *αν και κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας, επιταχύνεται*. Για να δούμε πώς αυτό είναι δυνατόν ας εξετάσουμε τον ορισμό τής μέσης επιτάχυνσης $\bar{\boldsymbol{a}} = \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$

Να ληφθεί υπ' όψιν ότι η επιτάχυνση εξαρτάται από τη *μεταβολή τού διανύσματος ταχύτητας*. Επειδή η ταχύτητα είναι μέγεθος διανυσματικό, υπάρχουν δύο τρόποι να μεταβληθεί: με τη μεταβολή τού *μέτρου της* ή με τη μεταβολή τής *διεύθυνσής της*. Αυτή η δεύτερη περίπτωση ισχύει για ένα σώμα που κινείται σε κυκλική τροχιά με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Το διάνυσμα τής ταχύτητας έχει πάντοτε τη διεύθυνση τής εφαπτομένης στην τροχιά και, στην περίπτωση που μελετούμε, είναι κάθετο στο $\boldsymbol{r}$. Θα δείξουμε ότι, στην



Σχήμα 4.13 (a) Κυκλική κίνηση ενός σώματος που κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας. (b) Καθώς το σώμα κινείται από το P στο Q, η κατεύθυνση τού διανύσματος τής ταχύτητας μεταβάλλεται από $\boldsymbol{v}_i$ σε $\boldsymbol{v}_f$. (c) Γραφική κατασκευή για να βρεθεί η κατεύθυνση τής μεταβολής τής ταχύτητας, $\Delta\boldsymbol{v}$, η οποία κατευθύνεται προς το κέντρο τού κύκλου.

περίπτωση που εξετάζουμε, το διάνυσμα τής επιτάχυνσης είναι κάθετο στην τροχιά και κατευθύνεται πάντοτε προς το κέντρο τού κύκλου. Τέτοιου είδους επιτάχυνση λέγεται *κεντρομόλος επιτάχυνση* και το μέτρο της είναι

$$a_r = \frac{v^2}{r} \tag{4.19}$$

Μελετήστε το Σχήμα 4.13b για να δείτε πώς εξάγεται η Εξίσωση 4.19. Εδώ βλέπουμε ένα σώμα πρώτα στο σημείο P με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ κατά τη στιγμή t_i, και αργότερα στο σημείο Q με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ την στιγμή t_f. Υποθέτουμε ότι τα $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ και $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ έχουν το ίδιο μέτρο, δηλαδή διαφέρουν μόνον ως προς την κατεύθυνση (δηλαδή $|\boldsymbol{v}_\mathrm{i}| = |\boldsymbol{v}_\mathrm{f}| = |\boldsymbol{v}|$). Ας κάνουμε τον υπολογισμό τής επιτάχυνσης αρχίζοντας με την μέση επιτάχυνση:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{f} - \boldsymbol{v}_\mathrm{i}}{t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

Η τελευταία εξίσωση μάς λέει ότι πρέπει να αφαιρέσουμε διανυσματικά το $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ από το $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$. Το $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\mathrm{f} - \boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ είναι η μεταβολή τής ταχύτητας. Δηλαδή, βρίσκουμε το $\Delta \boldsymbol{v}$ προσθέτοντας το διάνυσμα $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ στο διάνυσμα $-\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$. Στο Σχήμα 4.13c βλέπετε σε γραφική παράσταση την αφαίρεση τών δύο διανυσμάτων. Να σημειωθεί ότι όταν το χρονικό διάστημα Δt είναι πολύ μικρό, τα Δs και $\Delta \theta$ είναι πολύ μικρά, αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή το $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ θα είναι σχεδόν παράλληλο προς το $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ και το διάνυσμα $\Delta \boldsymbol{v}$ θα είναι κάθετο, σχεδόν, επάνω τους με κατεύθυνση προς το κέντρο τού κύκλου.

Μελετήστε τώρα το τρίγωνο στο Σχήμα 4.13b, που έχει πλευρές Δs και r. Αυτό είναι όμοιο με το τρίγωνο τού Σχήματος 4.13c που έχει πλευρές $\Delta \boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{v}$. Επομένως

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r}$$

Εάν λύσουμε ως προς Δv και αντικαταστήσουμε στην $\bar{a} = \Delta v/\Delta t$ παίρνουμε $\bar{a}\ \Delta t = v\ \Delta s/r$ ή

$$\bar{a} = \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

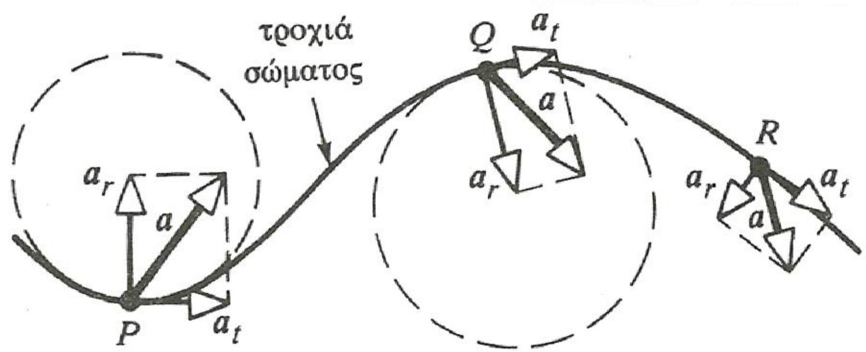
Φανταστείτε τώρα ότι τα σημεία P και Q, στο Σχήμα 4.13b αρχίζουν να προσεγγίζουν το ένα με το άλλο. Έτσι το $\Delta \boldsymbol{v}$ κατευθύνεται προς το κέντρο τού κύκλου και, επειδή η επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση τού $\Delta \boldsymbol{v}$, κατευθύνεται και αυτή προς το κέντρο. Τέλος, καθώς το P και το Q προσεγγίζουν το ένα το άλλο, το Δt τείνει προς το μηδέν και ο λόγος $\Delta s/\Delta t$ τείνει προς την ταχύτητα $\boldsymbol{v}$. Άρα, στο όριο $\Delta t \to 0$, η επιτάχυνση είναι

$$a_{\mathrm{r}} = \frac{v^2}{r}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στην ομαλή κυκλική κίνηση η επιτάχυνση κατευθύνεται προς το κέντρο τού κύκλου και έχει μέτρο v^2/r. Αποδείξτε ότι οι διαστάσεις τού a_{r} είναι $[\mathrm{L}]/[\mathrm{T}^2]$, όπως απαιτείται για διαστάσεις επιτάχυνσης. Θα επανέλθουμε στην εξέταση τής κυκλικής κίνησης στο Υποκεφάλαιο 6.1.

4.5 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΙΚΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ

Ας μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος σε τροχιά με ταχύτητα που μεταβάλλεται ως προς το μέτρο και την κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.14. Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα τού σώματος έχει πάντοτε τη διεύθυνση τής εφαπτομένης στην τροχιά, αλλά το διάνυσμα τής επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}$ σχηματίζει γωνία με την τροχιά. Καθώς το σώμα κινείται πάνω στην τροχιά



Σχήμα 4.14 Κίνηση ενός σώματος σε μια τυχαία τροχιά που κείται πάνω στο επίπεδο xy. Το διάνυσμα τής ταχύτητας $\boldsymbol{v}$ εφάπτεται πάντοτε στην τροχιά, στη γενική περίπτωση μεταβάλλεται η κατεύθυνσή του και το μέτρο του. Είθισται να αναλύουμε το διάνυσμα τής επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}$ σε μία συνιστώσα στην διεύθυνση τής εφαπτομένης, την εφαπτομενική ή επιτρόχια επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_t$, και σε μία κάθετη ή ακτινική ή κεντρομόλο συνιστώσα, την $\boldsymbol{a}_r$, που είναι κάθετη προς την εφαπτομενική διεύθυνση και κατευθύνεται προς το κοίλο τής τροχιάς.

τού Σχήματος 4.14, παρατηρούμε ότι η κατεύθυνση τού διανύσματος τής επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}$ μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Το διάνυσμα αυτό μπορεί πάντοτε να αναλυθεί σε δύο διανύσματα-συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους: σε μία ακτινική συνιστώσα, δηλαδή το διάνυσμα, $\boldsymbol{a}_r$, και σε μία εφαπτομενική συνιστώσα, δηλαδή το διάνυσμα $\boldsymbol{a}_t$. Δηλαδή, το διάνυσμα τής επιτάχυνσης μπορεί να γραφεί ως διανυσματική συνισταμένη τών διανυσμάτων-συνιστωσών του:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} \tag{4.20}$$

Στην εφαπτομενική ή επιτρόχια συνιστώσα τής επιτάχυνσης οφείλεται η μεταβολή τού μέτρου τής ταχύτητας τού σώματος (θα τή λέμε και εφαπτομενική επιτάχυνση). Το μέτρο της είναι

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{d|v|}{dt} \tag{4.21}$$

Στην ακτινική ή κεντρομόλο συνιστώσα τής επιτάχυνσης οφείλεται η μεταβολή τής κατεύθυνσης τής ταχύτητας τού σώματος (θα τή λέμε και ακτινική ή κεντρομόλο επιτάχυνση). Το μέτρο της είναι

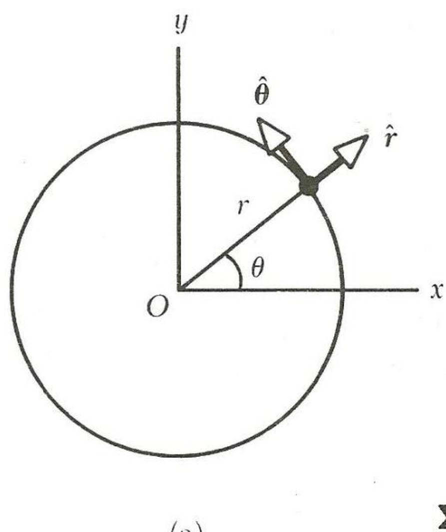
$$a_{\mathrm{r}} = \frac{v^2}{r} \tag{4.22}$$

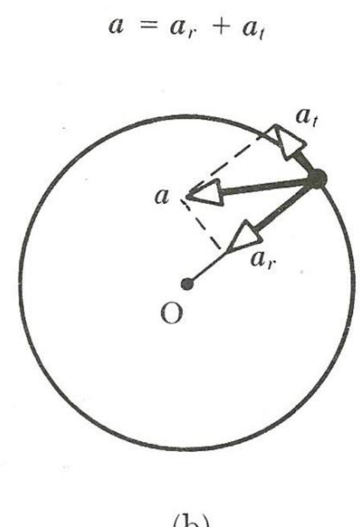
όπου r είναι η ακτίνα καμπυλότητας τής τροχιάς στο σημείο που μελετούμε. Επειδή η $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ είναι κάθετη στην $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ έχουμε $a = \sqrt{a_{\mathrm{r}}^2 + a_{\mathrm{t}}^2}$. Όπως είπαμε στην περίπτωση τής ομαλής κυκλικής κίνησης, το $\boldsymbol{a}_r$ έχει κατεύθυνση προς το κέντρο καμπυλότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.14.

Είναι χρήσιμο να γράφουμε την επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε κυκλική τροχιά χρησιμοποιώντας μοναδιαία διανύσματα. Γι' αυτό ορίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, όπου το $\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι *μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω* και το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι *μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση τέτοια ώστε αυτή να αυξάνει τη γωνία* θ, όταν η θ μετριέται από τον άξονα τών x με φορά αντίθετη προς τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού. Να ληφθεί υπ' όψιν ότι τόσο το $\hat{\boldsymbol{r}}$ όσο και το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ «κινούνται μαζί με το σώμα» και έτσι αλλάζουν θέση ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή. Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό αυτό γράφουμε ότι

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt}\hat{\theta} - \frac{v^2}{r}\hat{r} \tag{4.23}$$

Τα διανύσματα αυτά περιγράφονται στο Σχήμα 4.15b. Το αρνητικό πρόσημο τού $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ σημαίνει ότι αυτό έχει πάντοτε *αντίθετη* ακτινική κατεύθυνση από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{r}}$.





Σχήμα 4.15