ΘΕΡΙΝΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΤΕΣΤ 3 24/7/2017

Άσκηση 1. (μ. 20)
Να βρεθούν τα αναπτύγματα Taylor των παρακάτω συναρτήσεων έως όρους της υποδεικνυόμενης τάξης.

$(i)\ e^{-2t}\cos(t)$ ως όρους t^2 $\qquad (ii)\ \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ ως όρους x^3

Άσκηση 2. (μ.15).
Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της παρακάτω συνάρτησης μέχρι όρους τάξης x^3.

$$\frac{1}{(1+2x)\sqrt{1-3x}}$$

Άσκηση 3. (μ.15)
Να χρησιμοποιηθεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\sqrt{1+x}$ μέχρι όρους x^2 για να βρεθεί ο αριθμός $\sqrt{10}$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Άσκηση 4. (μ.30)
Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$(i)\ \int x\sqrt{x-2}\,dx \qquad (ii)\ \int \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (iii)\ \int \dfrac{e^{-2\sqrt{3x-1}}}{\sqrt{3x-1}}\,dx$

$(iv)\ \int \dfrac{dx}{x\ln x} \qquad (v)\ \int \dfrac{\cos x}{3-2\sin x}\,dx \qquad (vi)\ \int \dfrac{2+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

Άσκηση 5. (μ.20)
Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$(i)\ \int \dfrac{x^2}{x^2-4}\,dx \qquad (ii)\ \int \dfrac{x}{(x-2)^2}\,dx$

Δίνονται τα αναπτύγματα:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$$

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$$

ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΣΤ 3

1(i)

$$e^{-2t}\cdot\cos(t) = \left(1 + (-2t) + \frac{(-2t)^2}{2!} + \dots\right)\cdot\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2!}$$

$$+ (-2t)$$

$$+ \frac{(-2t)^2}{2!} + \dots = 1 - 2t - \frac{t^2}{2} + 2t^2 + \dots$$

$$= 1 - 2t + \frac{3}{2}t^2 + \dots$$

1(ii)

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

$$= \left((-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right)$$

$$= -x + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + \dots - x + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$= -2x - \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

2.

$$\frac{1}{(1+2x)\sqrt{1-3x}} = \frac{1}{1+2x} \cdot (1-3x)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \dots\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot (-3x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-3x)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-3x)^3 + \dots\right)$$

$$= \left(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{3}{2}x + \frac{27}{8}x^2 + \frac{135}{64}x^3\right)$$

$$= 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3$$

$$+ \frac{3}{2}x - 3x^2 + 6x^3$$

$$+ \frac{27}{8}x^2 - \frac{27}{4}x^3$$

$$+ \frac{135}{64}x^3 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{35}{8}x^2 - \frac{425}{64}x^3 + \dots$$

3.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9\left(1+\frac{1}{9}\right)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9}} =$$

$$= 3\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9}} \underset{x=\frac{1}{9}}{=\!=} 3\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{9^3}\right) =$$

$$= 3\cdot 1{,}0541 = 3.162$$

---

4 (i)

$$u = \sqrt{x-2}$$

$$u^2 = x-2 \rightarrow x = u^2+2$$

$$2u\,du = dx$$

$$\int x\sqrt{x-2}\,dx = \int (u^2+2)\cdot u\cdot 2u\cdot du$$

$$= \int 2u^4 + 4u^2\,du = 2\frac{u^5}{5} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{4}{3}(x-2)^{3/2} + C.$$

4(ii)

$$\int \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -\int e^{-2\sqrt{x}}\, d(-2\sqrt{x}) = -e^{-2\sqrt{x}} + C_1.$$

$$d(-2\sqrt{x}) = -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

4(iii) Από το προηγούμενο :

$$\int \frac{e^{-2\sqrt{3x-1}}}{\sqrt{3x-1}}\,dx = -\frac{e^{-2\sqrt{3x-1}}}{3} + C.$$

4(iv) $$\int \frac{dx}{x\,\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + C_1.$$

4(v)

$$\int \frac{\cos x}{3-2\sin x}\,dx = \frac{1}{-2}\cdot\int \frac{-2\cos x}{3-2\sin x}\,dx$$

$$d(3-2\sin x) = -2\cos x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(3-2\sin x)}{3-2\sin x} = -\frac{1}{2}\ln(3-2\sin x) + C'.$$

4 (vii)

$$\int \frac{2+\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= 2\cdot\tan x + \int \frac{-d\cos x}{\cos^2 x} = 2\cdot\tan x - \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}$$

$$= 2\tan x + \frac{1}{\cos x} + C$$

$$5(i)\quad \int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{x^2-4+4}{x^2-4}\,dx = \int \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4}\,dx$$

$$= \int 1 + \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx = x + 4\cdot\int \frac{dx}{(x-2)(x+2)}.$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{\overset{x+2}{A}}{x-2} + \frac{\overset{x-2}{B}}{x+2} = \frac{A\cdot(x+2)+B\cdot(x-2)}{(x-2)(x+2)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2:\quad 1 = A\cdot 4 \rightarrow A=\frac{1}{4} \\ x=-2:\quad 1=-4\cdot B \rightarrow B=-\frac{1}{4}\end{array}\right\} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$\rightarrow \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)} = \int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = x + 4\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

5(ii)

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{x-2+2}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{x-2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C.$$