Μοναδιαίο Υδρογράφημα (Unit Hydrograph)

Το μοναδιαίο υδρογράφημα είναι μια κωδικοποίηση της δυναμικής μιας λεκάνης απορροής θεωρώντας τη ως ένα αυτόνομο γραμμικό σύστημα. Αυτό σημαίνει τα εξής: Υποθέτουμε ότι εάν μια ορισμένη βροχόπτωση i προκαλεί μια ορισμένη απορροή Q, τότε υποθέτουμε: (1) ότι, π.χ., μία βροχόπτωση με διπλάσιες εντάσεις, $2i$, θα προκαλέσει διπλάσια απορροή, $2Q$, και (2) αν μία καταιγίδα είναι το άθροισμα δύο διαφορετικών βροχοπτώσεων i_1, i_2, δηλαδή η έντασή της είναι i_1+i_2, τότε η απορροή της είναι το άθροισμα των απορροών τους, Q_1+Q_2. Αυτή είναι η γραμμικότητα. Το 'αυτόνομο' του συστήματος είναι η υπόθεση ότι αν η ίδια καταιγίδα προκαλεί την ίδια απορροή οποτεδήποτε και να συμβεί. Το μοναδιαίο υδρογράφημα επιτρέπει στη συνέχεια την πρόβλεψη της απορροής σε σενάρια βροχόπτωσης τυχαίας μορφής και διάρκειας.

Επιπλέον υποθέσεις και περιορισμοί

- Υποθέτουμε χωρική ομοιομορφία στη βροχόπτωση. Αυτό σημαίνει προσέγγιση στο μέγεθος της λεκάνης: π.χ. <5000 km^2. Αντιμετώπιση του περιορισμού: reservoir routing.
- Υποθέτουμε χρονική ομοιομορφία στη βροχόπτωση, δηλαδή ότι μπορούμε να σχηματίσουμε μία χρονοσειρά ενεργού βροχόπτωσης από μερικές πραγματικές καταιγίδες ορισμένης διάρκειας στη λεκάνη απορροής, τέτοια ώστε η ένταση να είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια τηε βροχόπτωσης. Αντιμετώπιση του περιορισμού: στιγμιαίο μοναδιαίο υδρογράφημα (instantaneous unit hydrograph).
- Υποθέτουμε ότι υπάρχουν στοιχεία απορροής (και βροχόπτωσης) για τη λεκάνη (gauged watershed). Αντιμετώπιση του περιορισμού: synthetic hydrographs.

Μοναδιαίο υδρογράφημα διάρκειας *D* ωρών

Έστω ότι έχουμε τα στοιχεία για να σχηματίσουμε μια βροχόπτωση σταθερής έντασης i και διάρκειας D ωρών για μια ορισμένη λεκάνη. Έστω επίσης ότι γνωρίζουμε τη χρονοσειρά της απορροής Q. (Σε ότι ακολουθεί βροχόπτωση σημαίνει ενεργός και απορροή σημαίνει άμεση). Η βροχόπτωση αυτή έχει ολικό ύψος = iD. Η γραμμικότητα μας επιτρέπει να πάρουμε μια βροχόπτωση ολικού ύψους 1cm <u>και την αντίστοιχη απορροή</u>: Αρκεί να διαιρέσουμε τη βροχόπτωση και την απορροή με iD. Θα έχουμε τότε μια βροχόπτωση σταθερής έντασης 1cm/Dh ενώ η απορροή $u = Q/iD$ δίνει το <u>μοναδιαίο υδρογράφημα διάρκειας *D*</u>. Παράδειγμα στο UH.xls.

Σύνθετη βροχόπτωση από επεισόδια διάρκειας *D*

Έστω ότι έχουμε μια διαδοχή από επεισόδια διάρκειας ***D*** με ομοιόμορφη βροχόπτωση ολικού ύψους h_1, h_2, h_3, … cm. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα και το αυτόνομο του συστήματος βρίσκουμε την απορροή. Το κάθε επεισόδιο, αν συνέβαινε μόνο του, θα προκαλούσε μιά απορροή h_1u, h_2u, h_3u, … αντίστοιχα, η οποία ξεκινάει <u>την αντίστοιχη στιγμή έναρξης</u> του επεισοδίου. Στη συνέχεια προσθέτουμε όλες αυτές τις απορροές. Παράδειγμα στο UH.xls.

Μοναδιαίο υδρογράφημα τυχαίας διάρκειας – Η καμπύλη *S*

Δεδομένου ενός UH διάρκειας *D* ωρών θέλουμε να φτιάξουμε τα UH για διαφορετικές διάρκειες. Προφανώς αρκεί να μπορούμε να φτιάξουμε τα UH για διάρκειες μικρότερες από *D*. Αυτό γίνεται κατασκευάζοντας την καμπύλη της απορροής για μια αρκετά μεγάλη διάρκεια για βροχόπτωση σταθερής έντασης, δηλαδή προσθέτουμε την απορροή *u* για μια σειρά από διαδοχικά επεισόδια διάρκειας *D* και έντασης 1/*D* (που έχουμε ήδη φτιάξει). Αν συμπεριλάβουμε αρκετά τέτοια επεισόδια, η καμπύλη της απορροής κάποια στιγμή θα γίνει οριζόντια, διότι θα έχουμε ξεπεράσει το χρόνο συγκέντρωσης της λεκάνης, επομένως η σταθερής έντασης βροχόπτωση θα δίνει σταθερή παροχή. Αυτή η καμπύλη απορροής είναι η καμπύλη *S* (εξαιτίας του σχήματός της). Η καμπύλη *S* προφάνώς δεν εξαρτάται από τη διάρκεια *D*, καθώς η σταθερής έντασης βροχόπτωση μεγάλης διάρκειας θα μπορόύμε να έχει κατασκευαστεί από διαδοχικά επεισόδια μιας άλλης διάρκειας. Επομένως η καμπύλη *S* είναι χαρακτηριστική της λεκάνης. Παράδειγμα στο UH.xls.

Η καμπύλη *S* είναι λοιπόν το υδρογράφημα μιας βροχόπτωσης σταθερής έντασης 1/*D* μεγάλης διάρκειας. Μία βροχόπτωσης σταθερής έντασης 1/*D* μεγάλης διάρκειας που ξεκινάει Δt αργότερα θα προκαλέσει μια απορροή *S* που ξεκινάει Δt αργότερα (το σύστημα είναι αυτόνομο). Αν αφαιρέσουμε αυτές τις βροχοπτώσεις παίρνουμε μια βροχόπτωσης διάρκειας Δt, και έντασης 1/*D*. Η γραμμικότητα τώρα μας λέει ότι η απορροή αυτής της βροχόπτωσης είναι διαφορά των απορροών τους, που μπορούμε να συμβολίσουμε ΔS. Το ολικό ύψος της βροχόπτωσης αυτής είναι προφανώς $\Delta t/D$. Θέλουμε ύψος 1 cm, δηλαδή ένταση $1/\Delta t$, επομένως πολλαπλασιάζουμε τη χρονοσειρά της βροχόπτωσης με $D/\Delta t$. Από τη γραμμικότητα, η απορροή της θα είναι $\Delta S\, D/\Delta t$. Κατά συνέπεια, αυτή η απορροή δίνει το *μοναδιαίο* υδρογράφημα διάρκειας Δt:

$$u = D\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Παράδειγμα στο UH.xls.

Στιγμιαίο μοναδιαίο υδρογράφημα (IUH)

Έστω ότι με κάποιο τρόπο έχουμε την καμπύλη *S* για κάποια λεκάνη απορροής για κάθε χρονική στιγμή, π.χ., με κάποια προσέγγιση της ρεαλιστικής καμπύλης με συνεχείς συναρτήσεις. Μπορούμε να φανταστούμε ότι έχει προέλθει από διαδοχικά επεισόδια σταθερής έντασης βροχόπτωσης διάρκειας D=1 (σε ώρες). Τότε η ποσότητα

$$u = \frac{dS}{dt}$$

είναι το μοναδιαίο υδρογράφημα μίας βροχόπτωσης απειροστής διάρκειας *dt* (ωρών) και άπειρης έντασης 1/*dt* (επομένως ύψους 1 cm). Αυτό είναι το στιγμιαίο μοναδιαίο υδρογράφημα (IUH).

Γραμμικά μοντέλα της λεκάνης απορροής – Μοντέλο Nash

Έστω ένα δοχείο στο οποίο εισρέει νερό με ρυθμό *I* (m^3/s) και εκρέει με ρυθμό *Q* (m^3/s). Αν συμβολίσουμε με *V* (storage, m^3) τον όγκο του νερού που περιέχει σε μια δεδομένη στιγμή, η διατήρηση της μάζας μας λέει ότι

$$\frac{dV}{dt} = I - Q$$

Η λεκάνη απορροής μπορεί μοντελοποιηθεί ως ένα τέτοιο δοχείο όπου οι εισροές είναι η ενεργός βροχόπτωση, οι εκροές είναι η άμεση απορροή, και storage είναι το νερό που παραμένει επιφανειακά. Έχουμε ήδη χειριστεί τη λεκάνη ως γραμμικό σύστημα, επομένως ένα μοντέλο της λεκάνης σε αυτό το πλαίσιο θα πρέπει να ενσωματώνει τη γραμμικότητα μεταξύ αιτίου, δηλαδή *I*, (αλλά και *V*) και αποτελέσματος, δηλαδή *Q*. Αυτό επιτυγχάνεται στο μοντέλο του γραμμικού ταμιευτήρα, όπου υποθέτει κανείς ότι το *Q* είναι ανάλογο του *V*:

$$V = kQ$$

όπου *k* είναι μία ποσότητα με κλίμακα χρόνου (storage coefficient). Επίσης υποθέσαμε ότι το σύστημα είναι αυτόνομο, ότι δηλαδή τα ίδια αίτια προκαλούν τα ίδια αποτελέσματα όποτε και να συμβούν, ή πιο πρόχειρα, ότι η συμπεριφορά του συστήματος δεν αλλάζει με το χρόνο, επομένως θέλουμε το *k* να είναι σταθερό. Οι προηγούμενες δύο εξισώσεις δίνουν

$$k\frac{dQ}{dt} = I - Q$$

Έστω τώρα ότι έχουμε ως εισροή μία βροχόπτωση σταθερής έντασης *I* που ξεκινάει σε χρόνο t=0 και προχωράει απεριόριστα. Τότε η απορροή δίνει την καμπύλη *S*. Η λύση της εξίσωσης δίνει αυτή την απορροή

$$S = Q = I(1 - e^{-t/k})$$

όποτε, σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, το μοναδιαίο υδρογράφημα δίνεται από

$$u = \frac{dS}{dt} = \frac{I}{k}e^{-t/k}$$

και αντιστοιχεί σε βροχόπτωση απειροστής διάρκειας (που ξεκινάει σε χρόνο t=0). Αν σκεφτούμε όλες τις ποσότητες *I, Q, u* διαμέσου του ισοδύναμου ύψους σε cm, τότε ο ολικός όγκος (εμβαδό) που περικλείει το υδρογράφημα πρέπει να είναι 1. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να πάρουμε I=1 (ή ισοδύναμα να διαιρέσουμε βροχόπτωση και απορροή με *I*). Έχουμε φτιάξει λοιπόν το UH της λεκάνης απορροής ως γραμμικού ταμιευτήρα.

Το μοντέλο του Nash (1948) προσομοιάζει τη λεκάνη απορροής ως μία διαδοχή n γραμμικών ταμιευτήρων σταθερής k έτσι ώστε η απορροή του κάθε ταμιευτήρα είναι η εισροή του επόμενου, δηλαδή $I_2=Q_1$, $I_3=Q_2$,… και απορροή είναι προφανώς η απορροή του τελευταίου στη σειρά. Για να φτιάξουμε το μοναδιαίο υδρογράφημα αυτού του μοντέολου θα χρησιμοποιήσουμε την απορροή u του πρώτου ταμιευτήρα ως εισροή για το δεύτερο, οπότε βρίσκουμε

$$u = \frac{t}{k^2} e^{-t/k}$$

Αυτό είναι προφανώς το UH του συστήματος δύο διαδοχικών ταμιευτήρων ίδιου k. Συνεχίζοντας ως τον τελευταίο, βρίσκουμε για τους n ταμιευτήρες ότι το UH δίνεται από

$$u = \frac{(t/k)^{n-1}}{k\Gamma(n)} e^{-t/k}$$

όπου $\Gamma(x)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα. Ύπολογίζεται από το excel με την εντολή exp(gammaln.precise(x)). Αν και σκεφτόμαστε το n ως ακέραιο, κατά την πρακτική εφαρμογή του μοντέλου βολεύει να σκεφτόμαστε το n ως οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό. Με αυτό το αποτέλεσμα, έχουμε επιτύχει να μοντελοποίησουμε τη λεκάνη απορροής ως ένα αυτόνομο γραμμικό σύστημα του οποίου τα χαρακτηριστικά κωδικοποιούνται στους αριθμούς k και n.

Εκτίμηση των παραμέτρων *k* και *n*

Έστω i και Q τυχαίες αλλά αντίστοιχες χρονοσειρές βροχοπτωσης και απορροής για μια ορισμένη λεκάνη. Προσεγγιζουμε τη λεκάνη ως μια διαδοχή n όμοιων γραμμικών ταμιευτήρων σταθερής χρόνου k. Τότε έχουμε

$$k\frac{dQ_1}{dt} = i - Q_1$$
$$k\frac{dQ_2}{dt} = Q_1 - Q_2$$
$$k\frac{dQ_3}{dt} = Q_2 - Q_3$$
$$\vdots$$
$$k\frac{dQ}{dt} = Q_{n-1} - Q$$

Ορίζοντας τις ροπές

$$\langle t\rangle_i = \frac{\int tidt}{\int idt}, \quad \langle t\rangle_Q = \frac{\int tQdt}{\int Qdt}$$

$$\langle t^2\rangle_i = \frac{\int t^2 idt}{\int idt}, \quad \langle t^2\rangle_Q = \frac{\int t^2 Qdt}{\int Qdt}$$

που συγκεκριμένα είναι οι ροπές 1ης τάξης και 2ης τάξης για τη βροχόπτωση και την απορροή, έχουμε εύκολα

$$\begin{aligned}
&\langle t\rangle_{Q_1} - \langle t\rangle_i = k \\
&\langle t\rangle_{Q_2} - \langle t\rangle_{Q_1} = k \\
&\langle t\rangle_{Q_3} - \langle t\rangle_{Q_2} = k \\
&\vdots \\
&\langle t\rangle_Q - \langle t\rangle_{Q_{n-1}} = k
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
&\langle t^2\rangle_{Q_1} - \langle t^2\rangle_i = k\langle t\rangle_{Q_1} \\
&\langle t^2\rangle_{Q_2} - \langle t^2\rangle_{Q_1} = k\langle t\rangle_{Q_2} \\
&\langle t^2\rangle_{Q_3} - \langle t^2\rangle_{Q_2} = k\langle t\rangle_{Q_3} \\
&\vdots \\
&\langle t^2\rangle_Q - \langle t^2\rangle_{Q_{n-1}} = k\langle t\rangle_Q
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας το κάθε σετ εξισώσεων έχουμε: από το πρώτο

$$\boxed{\langle t\rangle_Q - \langle t\rangle_i = nk}$$

και από το δεύτερο

$$\langle t^2\rangle_Q - \langle t^2\rangle_i = 2k(\langle t\rangle_{Q_1} + \langle t\rangle_{Q_2} + \ldots + \langle t\rangle_{Q_{n-1}} + \langle t\rangle_Q)$$

Λύνοντας όμως την κάθε εξίσωση του πρώτου σετ έχουμε επίσης

$$\begin{aligned}
&\langle t\rangle_{Q_1} = k + \langle t\rangle_i \\
&\langle t\rangle_{Q_2} = k + \langle t\rangle_{Q_1} = 2k + \langle t\rangle_i \\
&\langle t\rangle_{Q_3} = k + \langle t\rangle_{Q_2} = 3k + \langle t\rangle_i \\
&\vdots \\
&\langle t\rangle_Q = k + \langle t\rangle_{Q_{n-1}} = nk + \langle t\rangle_i
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$\langle t^2\rangle_Q - \langle t^2\rangle_i = 2k(\{1+2+3+...+n\}k + n\langle t\rangle_i) \Rightarrow \boxed{\langle t^2\rangle_Q - \langle t^2\rangle_i = n(n+1)k^2 + 2nk\langle t\rangle_i}$$

Ορίζουμε για ευκολία

$$\Delta t = \langle t\rangle_Q - \langle t\rangle_i$$
$$\Delta t^2 = \langle t^2\rangle_Q - \langle t^2\rangle_i$$

που είναι αντίστοιχα ο κεντροβαρικός χρόνος και η κεντροβαρική τιμή του τετραγώνου το χρόνου. Τότε προκύπτει εύκολα ότι

$$k = \frac{\Delta t^2}{\Delta t} - \Delta t - 2\langle t\rangle_i$$
$$n = \frac{\Delta t}{k}$$

Προσεγγιστικά οι ροπές $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης δίνονται από

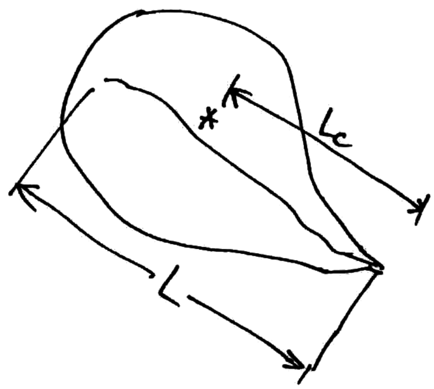
$$\langle t\rangle_i = \frac{\sum ti}{\sum i}, \quad \langle t^2\rangle_i = \frac{\sum t^2 i}{\sum i}, \qquad \langle t\rangle_Q = \frac{\sum tQ}{\sum Q}, \quad \langle t^2\rangle_Q = \frac{\sum t^2 Q}{\sum Q}$$

Παράδειγμα στο UH.xls.

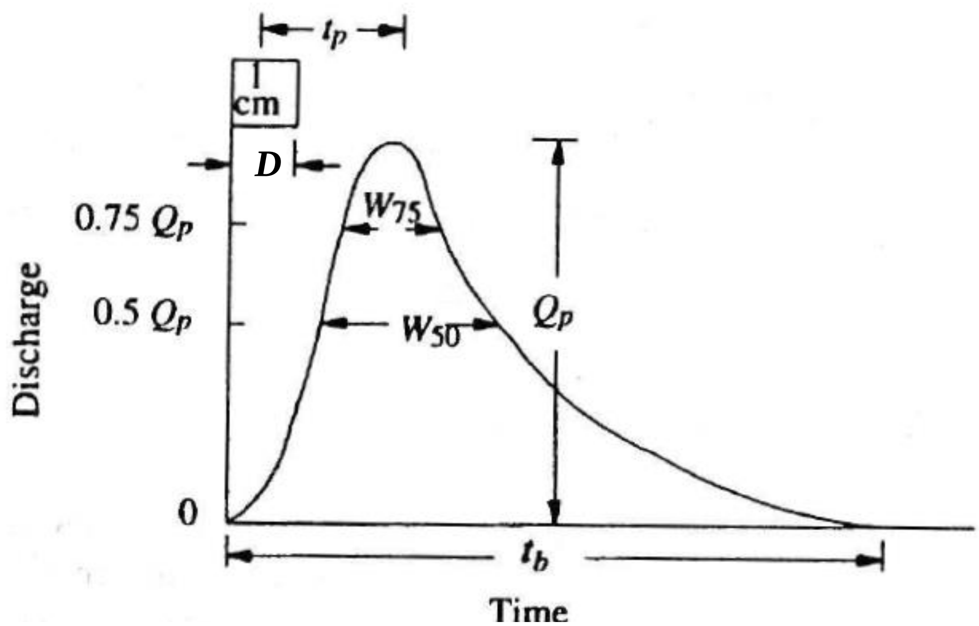
Synthetic UH

Αυτή η κατασκευή του UH εκμεταλλεύεται το συσχετισμό μεταξύ των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της λεκάνης και των γενικών χαρακτηριστικών της καμπύλης UH και χρησιμεύει όταν δεν υπάρχουν στοιχεία βροχόπτωσης/απορροής. Θα αναφερθούμε στο UH του Snyder (1938). Άλλες μεθόδοι synthetic UH, όπως το αδιάστατο UH του Soil Conservation Survey (SCS), μπορούν να βρεθούν π.χ. στο Introduction to Hydrology, Warren Viessman & Gary L. Lewis.

Γεωμετρικά χαρακτηριστικά λεκάνης
L = μήκος της λεκάνης, κατά μήκος του κεντρικού υδατορεύματος
L_c = απόσταση του κεντροειδούς από την έξοδο της λεκάνης



Χαρακτηριστικά του UH
t_p = χρόνος υστέρησης (lag) από το μέσο της βροχόπτωσης ως το peak της απορροής
D = διάρκεια βροχόπτωσης
Q_p = μέγιστο του UH
t_b = χρόνος βάσης (base, διάρκεια απορροής)
w_{50} = χρονικό εύρος του UH στο $Q=0.50Q_p$
w_{75} = χρονικό εύρος του UH στο $Q=0.75Q_p$



Το UH είναι standard, με την έννοια αυτού του μοντέλου, τότε ισχύει η πρώτη σχέση του παρακάτω πίνακα, μεταξύ $D=t_p/5.5$.

STANDARD UH (duration $D_r = D$)

$$t_p = 0.75 C_t (L L_c)^{0.3}$$

$$D = \frac{t_p}{5.5}$$

$$Q_p = 2.78 C_p \frac{A}{t_p}$$

$t_b = 72 + 3t_p$ σε ώρες, ή $t_b = 5t_p + 2.5D$, ή $t_b = 5.56\dfrac{A}{Q_p}$

$$w_{50} = \frac{2.14}{(Q_p/A)^{1.08}}, \quad w_{75} = \frac{w_{50}}{1.75}$$

Αν η ζητούμενη διάρκεια D_r είναι διαφορετική από τη standard διάρκεια, τότε διορθώνουμε το χρόνο υστέρησης με την τελευταία σχέση παρακάτω και κάνουμε υπολογισμούς με αυτό.

NON-STANDARD UH (required duration $D_r \neq D$)

$$t_p = 0.75 C_t (L L_c)^{0.3}$$

$$D = \frac{t_p}{5.5} \neq D_r$$

$$t_p' = t_p + \frac{D_r - D}{4} = \frac{D_r}{4} + \frac{21}{22} t_p$$

Τα υπόλοιπα στοιχεία υπολογίζονται με το t_p' που είναι ο <u>πραγματικός χρόνος υστέρησης</u> και με την ζητούμενη διάρκεια D_r.

$$Q_p = 2.78 C_p \frac{A}{t_p'}$$

$t_b = 72 + 3t_p'$ σε ώρες, ή $t_b = 5t_p' + 2.5D_r$, ή $t_b = 5.56\dfrac{A}{Q_p}$

$$w_{50} = \frac{2.14}{(Q_p/A)^{1.08}}, \quad w_{75} = \frac{w_{50}}{1.75}$$

Άν έχουμε στοιχεία για μία λεκάνη απορροής (gauged watershed) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές C_t, C_p από τα στοιχεία αυτά. Οι σταθερές αυτές επιτρέπουν να κατασκευάσουμε το synthetic UH μιας άλλης λεκάνης η οποία εκτιμούμε ότι έχει συγγενή μετεορολογικά χαρακτηριστικά. Παράδειγμα στο UH.xls.