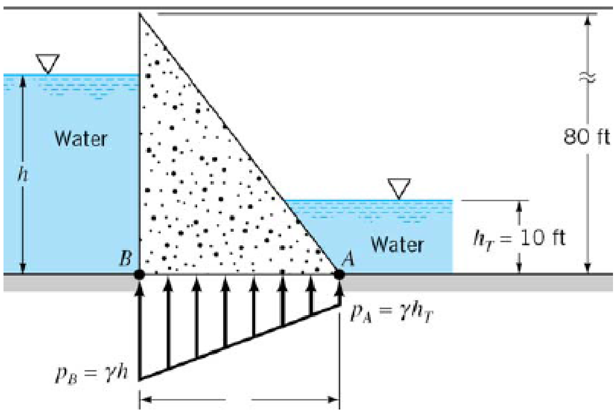
## ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

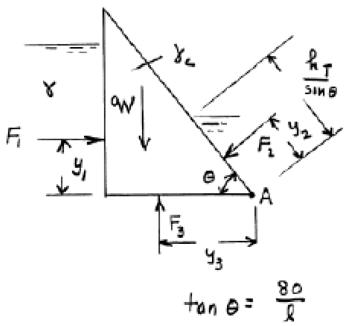
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ανάντη ενός τσιμεντένιου φράγματος (ειδικό βάρος 23565 $N/m^3$) μήκους $l = 5$ m το υψος του νερού είναι h . Μια διαρροή στη βάση του φράγματος έχει σαν αποτέλεσμα να αναπτυχθεί μια πίεση κάτω από το φράγμα με κατανομή που φαίνεται στο σχήμα.
Υπολογίστε το μέγιστο επιτρεπόμενο υψος h έτσι ώστε να μην ανατραπεί το φράγμα ως προς το σημείο Α.
Το πλάτος του φράγματος (κάθετα στο χαρτί) θεωρείται μοναδιαίο (1ft=0.305 m).




**ΛΥΣΗ**

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο φράγμα



$$F_1 = \frac{\gamma h^2}{2} \text{ (για μοναδιαίο μήκος)}$$

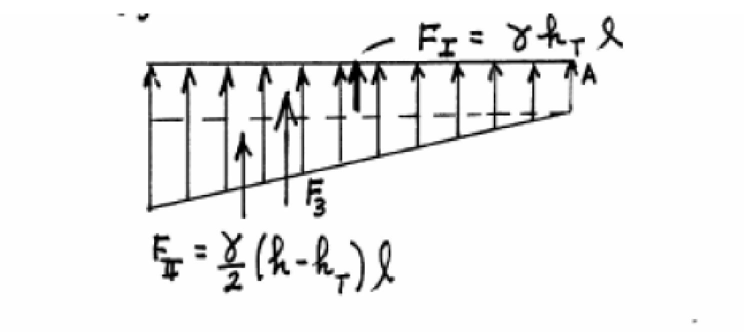
$$W = \gamma_{\tau\sigma}\left(\frac{1}{2}\right)(\ell)(24) = 12\gamma_{\tau\sigma}\ell$$

$$F_3 = \left(\frac{\gamma h + \gamma h_T}{2}\right)\ell$$

$$F_2 = \gamma\left(\frac{h_T}{2}\right)\left(\frac{h_T}{\sin\theta}\right) = \frac{\gamma h_T^{\ 2}}{2\sin\theta}$$

$$y_1 = \frac{h}{3} \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{h_T}{\sin\theta}\right)$$

Για τον προσδιορισμό του $y_3$ εξετάζουμε την κατανομή πίεσης στη βάση του φράγματος και από ροπές ως προς το Α παίρνουμε:




$$F_3 y_3 = F_I\left(\frac{\ell}{2}\right) + F_{II}\left(\frac{2}{3}\ell\right) \quad \Rightarrow \quad y_3 = \frac{F_I\left(\frac{\ell}{2}\right) + F_{II}\left(\frac{2}{3}\ell\right)}{F_3}$$

Οπου $F_3 = F_I + F_{II}$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις για τα $F_I$ and $F_{II}$ παίρνουμε

$$y_3 = \frac{\ell\left(\frac{h_T}{3} + \frac{2}{3}h\right)}{h + h_T}$$

Για την ισορροπία του φράγματος $\sum M_A = 0$, και επομένως

$$\mathbf{F_1 y_1 - W\left(\frac{2}{3}\ell\right) - F_2 y_2 + F_3 y_3 = 0} \qquad \textbf{(1)}$$

Για $\gamma = 9810 \ \mathrm{N/m^3}$ , $\gamma_c = 23565 \ \mathrm{N/m^3}$ και $h_T = 3\mathrm{m}$ έχουμε

$$F_1 = 4905 h^2 \quad W = 282780 \ell \quad F_2 = \frac{882.9}{\sin\theta} \quad y_2 = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$F_3 = 4905(h+3)\ell \quad y_3 = \frac{\ell\left(\frac{3}{3}+\frac{2}{3}h\right)}{h+h_T} = \frac{(0.666h+1)}{(h+3)}\ell$$

Αντικατάσταση των παραπάνω στην (1) δίνει

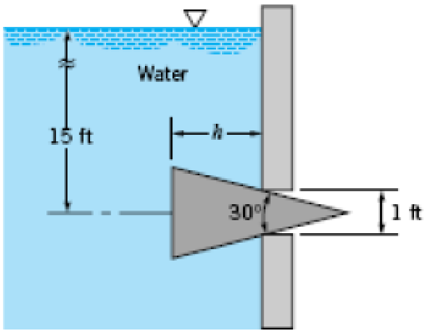
$$\mathbf{\left(4905h^2\right)\left(\frac{h}{3}\right)-(282780\ell)(\frac{2}{3}\ell)-\left(\frac{882.9}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)+\left[4905(h+3)\ell\right]\left[\frac{(0.6666h+1)\ell}{(h+3)}\right]=0}$$

Που απλοποιείται σε

$$\mathbf{1635h^3 + 3270\ell^2 h - 183615\ell^2 - \frac{882.9}{\sin^2\theta} = 0 \qquad (2)}$$

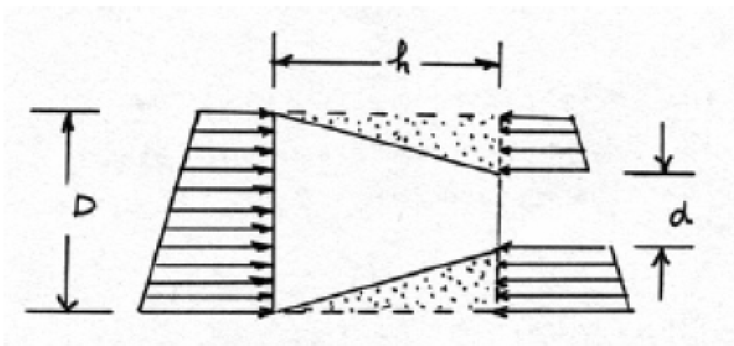
Για l=5 m, $\tan\theta = 24/5 \Rightarrow \theta = 78°$ και απο την (2) έχουμε h=12 m.

2. Η σφήνα του σχήματος καλύπτει την οπή στο τοίχωμα της δεξαμενής. Δείξτε ότι η οριζόντια δύναμη που ασκεί το νερό στην σφήνα δεν εξαρτάται από το h. Υπολογίστε το μέγεθος της παραπάνω δύναμης.

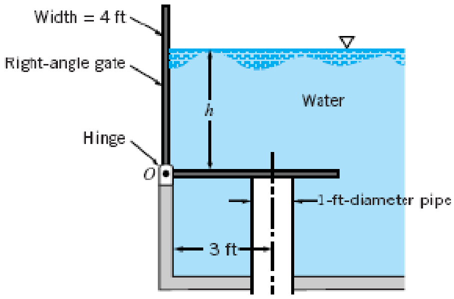



**ΛΥΣΗ**
(α) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι πιέσεις που ασκούνται σε κύλινδρο διαμέτρου D και μήκους h. Οι πιέσεις αλληλοαναιρούνται εκτός από το κεντρικό τμήμα διαμέτρου d. Η δύναμη λόγω των πιέσεων στο τμήμα αυτό εξαρτάται από το ειδικό βάρος του υγρού, το ύψος του νερού πάνω από το κέντρο βάρος της επιφάνειας και από την διάμετρο d.

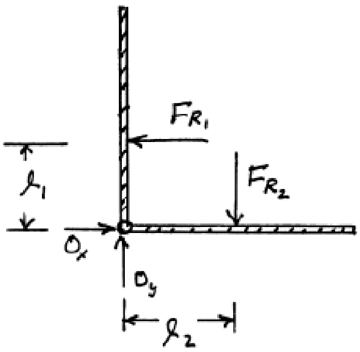
(β) Για κυκλική επιφάνεια διαμέτρου d=0.3 m η δύναμη $F_R$ υπολογίζεται από την σχέση $F_R=\gamma h_c A=9810*4.5*(\pi/4)*0.3^2= 3120$ N.



3. Μία λεπτή γωνιακή θυρίδα πλάτους 1.2 m (κάθετα στο χαρτί) και αμελητέας μάζας είναι ελεύθερη να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση στο σημείο 0 όπως φαίνεται στο σχήμα. Το οριζόντιο τμήμα της θυρίδας καλύπτει ένα σωλήνα διαμέτρου 0.3 m που περιέχει αέρα με ατμοσφαιρική πίεση.
Υπολογίστε το ελάχιστο βάθος νερού h για το οποίο η θυρίδα θα περιστραφεί και θα επιτρέπει στο νερό να εισέλθει στο σωλήνα.




**ΛΥΣΗ**




Για την ισορροπία

$$\sum M_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{R_1}\,\ell_1 = F_{R_2}\,\ell_2 \quad (1)$$

$$F_{R_1} = \gamma\, h_{c_1} A = (9810)(\frac{h}{2})(1.2h) = 5886h^2$$

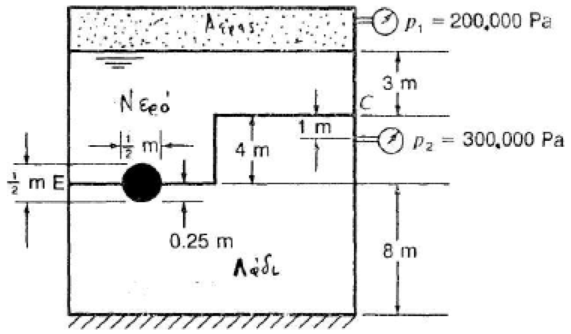
Για την δύναμη στο οριζόντιο τμήμα της θυρίδας ( λόγω πίεσης στις δύο πλευρές της εκτός από το τμήμα του σωλήνα)

$$F_{R_2} = \gamma h\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.3)^2 = (9810)(h)(\frac{\pi}{4})(0.3)^2 = 693.43h$$

και επομένως απο την (1) για $l_1 = h/3$ και $l_2 = 1\text{m}$

$$(5886h^2)(\frac{h}{3}) = (693.43h)(1) \quad \Rightarrow \quad h=0.594 \text{ m}$$

4. Η δεξαμενή του σχήματος διαχωρίζεται ερμητικά σε δύο μέρη που περιέχουν νερό και αέρα επάνω και λάδι κάτω ($\rho_\lambda$=800kg/m$^3$). Μια σφαίρα διαμέτρου 0.5 m συγκολλάται στο διαχωριστικό EC και εκτείνεται ισόποσα στο νερό και στο λάδι. Υπολογίστε το μέγεθος και τη φορά της κάθετης δύναμης που ασκείται στη σφαίρα.




**ΛΥΣΗ**

Στο επάνω ημισφαίριο οι δυνάμεις που ασκούνται από τον αέρα και νερό υπολογίζονται με την μεθοδολογία που ακολουθείται για τον υπολογισμό δύναμης σε καμπύλη επιφάνεια.

Θεωρώντας έναν κύλινδρο διαμέτρου 0.5 m και ύψος 0.25 m η δύναμη από τον αέρα (με φορά προς τα κάτω) είναι

$$\mathbf{F_{\alpha\varepsilon\rho} = p_{\alpha\varepsilon\rho} A = 200.000 \frac{\pi\, 0.25^2}{4} = 9817.5 \;\; N}$$

Και η δύναμη από το νερό (με φορά προς τα κάτω) είναι

$$\mathbf{F_{\nu\varepsilon\rho} = F_1 + F_2 = p_{\nu\varepsilon\rho} A + \gamma_{\nu\varepsilon\rho} V_{\nu\varepsilon\rho} = \left(\gamma_{\nu\varepsilon\rho} h\right) \frac{\pi 0.25^2}{4} + \gamma_{\nu\varepsilon\rho}\left(V_{\kappa\upsilon\lambda} - V_{\eta\mu\iota\sigma}\right) =}$$

$$\mathbf{(9810 \cdot 3.75)\frac{\pi 0.25^2}{4} + 9810\left(\frac{\pi 0.5^2}{4} \cdot 0.25 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 0.25^2\right) = 1805.8 + 159.9 = 1965.7 \;\; N}$$

Ανάλογα για το κάτω ημισφαίριο που είναι στο λάδι θεωρούμε κύλινδρο διαμέτρου 0.5 m και ύψους 0.25 m.

Η δύναμη που ασκείται στην κυκλική επιφάνεια του κυλίνδρου (με φορά προς τα πάνω) είναι

$$\mathbf{F_{1,\lambda\alpha\delta} = p_{\lambda\alpha\delta} A = \left(p_2 + \gamma_{\lambda\alpha\delta} 3.25\right)\frac{\pi 0.25^2}{4} = \left(300.000 + 9.81 \cdot 800 \cdot 3.25\right)\frac{\pi 0.25^2}{4} = 15978.2 \;\; N}$$

Η δύναμη λόγω του βάρους του λαδιού στον όγκο ελέγχου (με φορά προς τα κάτω) είναι

$$\mathbf{F_{2,\lambda\alpha\delta} = \gamma_{\lambda\alpha\delta} V_{\lambda\alpha\delta} = \gamma_{\lambda\alpha\delta}\left(V_{\kappa\upsilon\lambda} - V_{\eta\mu\iota\sigma}\right) = 9.81 \cdot 800\left(\frac{\pi \cdot 0.5^2}{4} \cdot 0.25 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \cdot 0.25^3\right) = 127.9 \;\; N}$$

Άρα η τελική κατακόρυφη δύναμη θα είναι

$$\mathbf{F_{\tau\varepsilon\lambda} = F_{\alpha\varepsilon\rho} + F_{\nu\varepsilon\rho} - F_{1,\lambda\alpha\delta} + F_{2,\lambda\alpha\delta} = 9817.5 + 1965.7 - 15978.2 + 127.9 = -4067.1 \;\; N}$$

(φορά προς τα πάνω).